الدكتور
عمران قوبا

الجبر الخطي

الطبعة الأولى



١٤١٩ - ١٤٢٠ هـ
١٩٩٨ - ١٩٩٩ م

من [illegible]عة دمشق



الدكتور

عمران قوبا



العام الدراسي

1999-1998



مقدّمـــة

لقد نشأ الجبر الخطّي من دراسة جمل المعادلات الخطّية، التي بدأها LEIBNITZ في عام ١٦٧٨ ثم تابعها MACLAURIN فأعطى العلاقات التي تسمح بحل جمل المعـــادلات الخطيـــة بمجهولين وبثلاثة مجاهيل عام ١٧٤٨. وأكمل CRAMER دراسة الحالة العامّة في عام ١٧٥٤.

ثُم جاءت، انطلاقاً من الدراسات السابقة، فكرة تعريف المُحدّد من المرتبة n وذلك بالتدريج على n عن طريق نشـــر المحدّد وفق ســـطر أو عمود، لكلٍ من VANDERMONDE وLAPLACE. ومن جهة أخرى، اعتمد GAUSS في كتابه "Recherches Arithemétiques" رمزاً في هيئة جدولٍ للدلالة على تحويل خطّي، فظهر مفهوم المصفوفة، ثُـــم عرّف GAUSS ضرب المصفوفات. وهذا ما سمح للعالِم CAUCHY باكتشاف قاعدة جداء مُحدِّدين التي نشـــرها في أطروحة عام ١٨١٥.

وبقي مفهوما المصفوفة والمحدِّد متلازمين جداً في أذهان علماء الرياضيـــات، مدةً من الزمن. وفي عام ١٨٢٦ عرّف CAUCHY كثير الحـــدود المميِّز لمصفوفـــة، وذلك في دراســـته للمحاور الأساسيّة لسطح من الدرجة الثانية. ثُم تطوّرت نظريّة المصفوفات في منتصف القرن التاسع عشر على يد كلٍّ من CAYLEY و SYLVESTER. وأصبحت المفاهيم الجديدة متعارفـــة ومألوفة أكثر فأكثر، وهذا ما أتاح المجال لظهور مفهوم الفضاء الشعاعي الذي له n بُعـــداً، والذي تحدّث عنه لأوّل مرة كلٌّ من CAYLEY و GRASSMAN في الأعـــوام ١٨٤٣-١٨٤٥، وأخيراً قام PEANO في عام ١٨٨٨ بصياغة التعاريف النهائيّة، المبنيّة على موضوعات أوّليـــة، للجبر الخطّي.

بقيت وجهة النظر المصفوفيّة المبنية على جمل الإحداثيات مهيمنة على الجبر الخطّـــي حتى الثلاثينيات من هذا القرن، ثُم أخذت النظرة الهندسيّة الحديثة، القائمة على الفضـــاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطيّة، تؤدّي دورها أكثر فأكثر بسبب عموميتها واستقلالها عن الجمل الإحداثيّة.

فيما يلي عَرْضٌ لفحوى هذا الكتاب:

- يتضمّن الفصل الأول التعاريف الأساسيّة في الفضاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطيّة.
- ويدرس الفصل الثاني مسألة البُعد في الفضاءات الشعاعيّة، و بوجه خاص الفضاءات الشعاعية ذات الأبعاد المنتهية.
- ويعالج الفصل الثالث الأشكال الخطيّة على فضاء شعاعيّ، والثنويّة في الفضاءات الشعاعيّة.
- ويتصدّى الفصل الرابع لدراسة المصفوفات، والعمليات عليها، وخواصها ، ثُم علاقتها بالتطبيقات الخطيّة.
- ويعرض الفصل الخامس مفهوم المحدِّدات، وحسابها، وحل جمل المعادلات الخطيّة.
- ويشتمل الفصل السادس على دراسة اختزال التطبيقات الخطيّة، أي إمكان تمثيلها بمصفوفات قطريّة أو مثلّثية.
- وأخيراً نجد في الفصل السابع الفضاءات الشعاعيّة المزوّدة بجداء سلّمي، وهي بنى غنيّة جداً، تتلازم فيها دراسة الجبر مع دراسة التحليل، فتعطي العديد من النظريات الهامّة. ونفترض عند دراسة هذا الفصل أنّ القارئ على دراية بالفضاءات الشعاعية المنظّمة.

هذا ويتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمرينات المتباينة في درجات صعوبتها، والتي تهدف إلى مساعدة الطالب على اكتساب المهارات اللازمة، واستيعاب المفاهيم المدروسة

ختاماً، أُزجي الشكر لجميع الزملاء الذين ساهموا في إخراج هذا الكتاب إلى النور، وأُعرب سلفاً عن شكري لكلّ زميل يُبدي ملاحظة أو انتقاداً بنّاءين على فحوى هذا الكتاب.

كانون الثاني 1999 عمران قوبا

الفصل الأوّل

الفضاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطّيّة

I.1. عموميّات

I.1-1. تعريف: لتكن E مجموعة غير خالية، وليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً. نفترض أنّ المجموعة E مزودة بقانوني تشكيل أوّلهما داخلي: $E \times E \to E : (x,y) \mapsto x+y$ وثانيهما خارجيّ: $\mathbb{K} \times E \to E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$. نقول إنّ البنية $(E,+,\cdot)$ فضاءٌ شعاعيّ على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، إذا وفقط إذا تحقّقت الشروط :

1. البنية $(E,+)$ زمرة تبديليّة.
2. يحقّق قانون التشكيل الخارجيّ $(\cdot)$ الخواص التالية:
   - *i*. أياً كانت $x \in E$، فإن $1 \cdot x = x$.
   - *ii*. أياً كانت $x \in E$ و $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$، فإن $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
   - *iii*. أياً كانت $(x,y) \in E^2$ و $\alpha \in \mathbb{K}$، فإن $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.
   - *iv*. أياً كانت $x \in E$ و $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$، فإن $(\alpha\beta)\cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

نسمّي عناصر E أشعّة، ونسمّي عناصر $\mathbb{K}$ مؤثّرات سلّميّة.

I.1-2. أمثلة:

- ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً ولتكن $1 \le n$. تكوّن المجموعة $E = \mathbb{K}^n$ مزودةً بقانوني التشكيل التاليين فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$.

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1,\dots x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

- بوجه أعمّ، إذا كان E فضاءً شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$، وكانت X مجموعة غير خالية، كوّنت مجموعة التوابع التي منطلقها X ومستقرّ ها E والتي نرمز إليها بالرمز $\mathscr{F}(X,E)$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$ بالنسبة إلى القانونين المعرّفين كما يلي:

$$\forall x \in X, \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$\forall x \in X, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

نسمّي جماعة من عناصر E، مجموعة أدلّتها I، أيّ عنصر من $\mathscr{F}(I,E)$، وعندئذ نرمز إلى هذا العنصر بالرمز $(x_i)_{i\in I}$، ونرمز إلى الفضاء $\mathscr{F}(I,E)$ بالرمز E^I.

- إذا كانت $E_1,\dots,E_n$ فضاءات شعاعيّة على حقل $\mathbb{K}$، فإنّ القانونين التاليين يجعلان من الجداء الديكارتي $F = E_1 \times \cdots \times E_n$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$:

$$(x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1,\dots x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

- تكوّن $\mathbb{K}[X]$ أي مجموعة كثيرات الحدود بمتحوّل واحد على حقل $\mathbb{K}$، فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$، بالنسبة إلى قانوني جمع كثيرات الحدود وضربها بعدد من $\mathbb{K}$.

لنذكّر ببعض الخواص البسيطة التي نترك إثباتها تمريناً للقارئ:

I.1-3. مبرهنة: لتكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، عندئذ أياً كان $x \in E$ و $\alpha \in \mathbb{K}$ لدينا:

1. $\alpha \cdot 0_E = 0_E$ و $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.
2. إذا كان $\alpha \cdot x = 0_E$ فإمّا أن يكون $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ أو $x = 0_E$.
3. وأخيراً: $(-\alpha)\cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha x)$.

I.1-4. مبرهنة: ليكن $(E,+,\cdot)$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، ولتكن F مجموعة جزئية من E. نقول إنّ F فضاء شعاعي جزئي من E، إذا وفقط إذا كان $F \neq \varnothing$، وكانت F مغلقة بالنسبة إلى قانونيّ التشكيل المعرّفين على E. عندئذ تكون المجموعة F المزوّدةُ بمقصوريْ قانوني التشكيل $(+)$ و $(\cdot)$ إلى $F \times F$ و $\mathbb{K} \times F$ على التوالي، فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$.

ويتحقّق القارئ بسهولة صحةَ المبرهنة التالية:

I.1-5. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، ولتكن F مجموعة جزئية من E. عندئذ يكون F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E، إذا وفقط إذا كان $F \neq \varnothing$، وتحقّق الشرط: $\forall(x,y) \in F \times F,\quad \forall\lambda \in \mathbb{K},\quad \lambda \cdot x + y \in F$.

يكون كلٌّ من $\{0_E\}$ و E فضاءً شعاعياً جزئياً من E. ونسمّيهما الفضاءين الجزئيين التافهين.

I.1-6. أمثلة:

- ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً ولتكن n و $\mathbb{N}$. عندئذ تكوّن المجموعة

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] : \deg P \leq n\}$$

فضاء شعاعياً جزئياً من $\mathbb{K}[X]$.

- إذا كانت I مجموعة غير خالية، وكان $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، كوّنت المجموعة

$$\mathbb{K}^{(I)} = \{(x_i)_{i \in I} : \text{Card}\{i \in I : x_i \neq 0\} < +\infty\}$$

فضاءً شعاعياً جزئياً من $\mathbb{K}^I$. نسمّي أيَّ عنصر من $\mathbb{K}^{(I)}$ جماعة شبه معدومة من عناصر $\mathbb{K}$ مجموعةُ أدلّتها I. لاحظ أنّ $\mathbb{K}^{(I)} = \mathbb{K}^I$ إذا وفقط إذا كانت I مجموعة منتهية. ولنذكّر أنّ فضاء كثيرات الحدود $\mathbb{K}[X]$ ما هو إلاّ $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

- وبوجه أعمّ، إذا كانت I مجموعة غير خالية، وكان E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، كوّنت المجموعة $E^{(I)} = \{(x_i)_{i \in I} : \text{Card}\{i \in I : x_i \neq 0_E\} < +\infty\}$ فضاءً شعاعياً جزئياً من $E^I = \mathscr{F}(I, E)$. نسمّي أيَّ عنصر من $E^{(I)}$ جماعة أشعّة شبه معدومة من عناصر E مجموعةُ أدلّتها I.

I.1-7. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، ولتكن $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ جماعة من الفضاءات الشعاعيّة الجزئيّة من E. عندئذ يكون $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ فضاء شعاعيّاً جزئياً من E.

الإثبات

الإثبات تحقّقٌ مباشر انطلاقاً من التعريف. □

I.1-8. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، ولتكن $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ جماعة من الفضاءات الشعاعيّة الجزئيّة من E. نسمّي أصغر[a] فضاء شعاعيّ جزئي من E يحوي $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ الفضاء الجزئي المولّد بـ $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$، ونرمز إليه بالرمز $\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$. إنّ $\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ هو تقاطع جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من E الحاوية $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$، ويُعطى أيضاً بالعلاقة:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda : (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in E^{(\Lambda)}, \forall \lambda \in \Lambda, \ x_\lambda \in F_\lambda \right\}.$$

---

[a] بالنسبة إلى علاقة الاحتواء.

I.1-9. ملاحظة: إذا كانت $\Lambda = \mathbb{N}_n = \{1,\dots,n\}$ وكانت $F_1, F_2, \dots, F_n$ فضاءات شعاعيّة جزئية من E كتبنا $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ أو $\sum_{k=1}^{n} F_k$ للدلالة على الفضاء الشعاعيّ المولّد بـ $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ ، ويكون: $\sum_{k=1}^{n} F_k = \{x_1 + \dots + x_n : \forall k \in \mathbb{N}_n,\ x_k \in F_k\}$.

I.2. التطبيقات الخطّية

I.2-1. تعريف: ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ ، نقول عن تطبيق $u : E \to F$ إنّه خطّي إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E \times E, \quad u(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot u(x) + u(y).$$

ونرمز بالرمز $\mathcal{L}(E,F)$ إلى مجموعة التطبيقات الخطّية التي منطلقها E ومستقرها F . وهي فضاء شعاعي جزئي من $\mathscr{F}(E,F)$ فضاء التوابع التي منطلقها E ومستقرها F . وإذا كان u تطبيقاً من $\mathcal{L}(E,F)$ فإننا نرمز بالرمز $\ker u$ إلى نواته أي إلى المجموعة $u^{-1}(\{0\})$ ، ونرمز بالرمز $\operatorname{Im} u$ إلى صورة التطبيق u أي $u(E)$.

إنّ كل من $\ker u$ و $\operatorname{Im} u$ فضاء شعاعيّ جزئي، وهذا ناتج من المبرهنة التالية :

I.2-2. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على $\mathbb{K}$ ، وليكن u تطبيقاً خطّياً من $\mathcal{L}(E,F)$. وليكن E_1 و F_1 فضاءين شعاعيّين جزئيين من E و F على التوالي. عندئذ يكون $u(E_1)$ و $u^{-1}(F_1)$ فضاءين شعاعيّين جزئيين من F و E على التوالي.

الإثبات

ليكن y_1 و y_2 عنصرين من $u(E_1)$. عندئذ يوجد عنصران x_1 و x_2 من E_1 . بحيث $u(x_1) = y_1$ و $u(x_2) = y_2$ ، ومن ثَمّ أياً كانت $\lambda \in \mathbb{K}$ لدينا

$$\lambda \cdot y_1 + y_2 = u(\underbrace{\lambda \cdot x_1 + x_2}_{\in E_1}) \in u(E_1)$$

ومنه $u(E_1)$ فضاء شعاعيّ جزئي من E .

وكذلك ليكن x_1 و x_2 عنصرين من $u^{-1}(F_1)$. عندئذ أياً كانت $\lambda \in \mathbb{K}$ لدينا

$$u(\lambda \cdot x_1 + x_2) = \lambda \cdot u(x_1) + u(x_2) \in F_1$$

ومن ثَمّ $\lambda \cdot x_1 + x_2 \in u^{-1}(F_1)$. □

I.2-3. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على $\mathbb{K}$ ، وليكن u تطبيقاً خطّياً من $\mathcal{L}(E,F)$.
عندئذ يكون u متبايناً إذا وفقط إذا كان $\ker u = \{0_E\}$.

الإثبات

إنّ هذا التكافؤ واضح لأنّه، أيّاً كان (x,y) في $E \times E$ ، فإنّ

$$u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \ker u \quad \square$$

المبرهنة التالية واضحة.

I.2-4. مبرهنة: لتكن E و F و G فضاءات شعاعيّة على $\mathbb{K}$ ، وليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$ و v من $\mathcal{L}(F,G)$ عندئذ يكون $v \circ u$ تطبيقاً خطّياً من $\mathcal{L}(E,G)$.

I.2-5. ملاحظة: لقد جرت العادة أن نرمز بالرمز $\mathcal{L}(E)$ إلى الفضاء $\mathcal{L}(E,E)$ ، وهو يكوّن جبراً على الحقل $\mathbb{K}$ بالنسبة إلى القوانين $(+,\circ,\cdot)$ ويكون غير تبديليّ في الحالة العامّة.

I.2-6. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل التبديليّ $\mathbb{K}$ ، نرمز بالرمز $\mathcal{GL}(E)$ إلى مجموعة التقابلات الخطّية من E إلى E ، وهي زمرة بالنسبة إلى قانون تركيب التطبيقات $(\circ)$. تُسمّى الزمرةُ $(\mathcal{GL}(E),\circ)$ الزمرة الخطية على الفضاء E .

I.3. جماعات وجمل الأشعة

I.3-1. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$ و n في $\mathbb{N}^*$ ، ولتكن $(x_1,\ldots,x_n)$ جملة من عناصر E [♦]. لنتأمّل التطبيق الخطي

$$\Phi : \mathbb{K}^n \to E,\ (a_1,a_2,\ldots,a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

حيث نسمّي كل عنصر من النمط $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ عبارة خطّية بالجملة $(x_1,\ldots,x_n)$.

ونسمّي صورة التطبيق Φ ، الفضاء الشعاعيّ المولّد بالجملة $(x_1,\ldots,x_n)$. ونكتب

$$\operatorname{vect}((x_1,\ldots x_n)) = \operatorname{Im}\Phi = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k : (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

[♦] أي عنصراً من E^n .

- نقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ تولّد الفضاء E أو إنّها جملة مولّدة في E إذا وفقط إذا كان Φ غامراً، وهذا يكافئ قولنا إنه تمكن كتابة كل عنصر من E كعبارة خطيّة بالجملة $(x_1,\ldots,x_n)$، أو إنّ $E = \mathrm{vect}((x_1,\ldots,x_n))$.
- ونقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ حرّة، أو مستقلة خطيّاً، إذا وفقط إذا كان Φ متبايناً، أي $\ker\Phi = \{0\}$، وهذا يكافئ الشرط:

$$\forall(a_1,\ldots,a_n)\in \mathbb{K}^n,\quad \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = 0\right) \Rightarrow (a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0).$$

ونقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ مرتبطة خطيّاً إذا لم تكن حرّة.
- وأخيراً نقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ تُكوّن أساساً للفضاء E، إذا وفقط إذا كان Φ تقابلاً، أي إذا وفقط إذا كانت الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ حرّة ومولّدة في آن معاً.

هذا ويمكننا تعميم هذا التعريف ليشمل جماعات الأشعّة كما يلي:

I.3-2. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$ و I مجموعة غير خالية، ولتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر E [a]. ولنتأمّل التطبيق الخطي

$$\Psi : \mathbb{K}^{(I)} \to E,\ (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i x_i$$

حيث نلاحظ أن للمجموع السابق معنى، لأن الجماعة $(a_i)_{i\in I}$ شبه معدومة. وكما في السابق نسمّي صورة التطبيق Ψ، الفضاء الشعاعيّ المولّد بالجماعة $(x_i)_{i\in I}$، ويكون

$$\mathrm{vect}((x_i)_{i\in I}) = \left\{ \sum_{j\in J} a_j x_j : (\text{مجموعة جزئية منتهية من } I \ J) \wedge \left((a_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J\right) \right\}$$

- نقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$، تولّد الفضاء E أو إنّها جماعة مولّدة في E إذا وفقط إذا كان Ψ غامراً، وهذا يكافئ قولنا إنه تمكن كتابة كل عنصر من E كعبارة خطيّة بجماعة جزئية **منتهية** من الجماعة $(x_i)_{i\in I}$، أو إنّ $E = \mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$.
- ونقول الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة، أو مستقلة خطيّاً، إذا وفقط إذا كان Ψ متبايناً، أي $\ker\Psi = \{0\}$، وهذا يكافئ كون كلّ جماعة جزئية **منتهية** من الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ حرةً. ونقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطيّاً إذا لم تكن حرّة.

---

[a] أي عنصراً من E^I.

☜ وأخيراً نقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ تُكوِّن أساساً للفضاء E، إذا وفقط إذا كان Ψ تقابلاً، أي إذا وفقط إذا كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ حرّة ومولّدة في آن معاً.

لنُدرج في المبرهنة التالية بعض الخواص البسيطة.

I.3-3. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$ و I مجموعة غير خالية، ولتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر E.

1. إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة، كانت كلُّ جماعة $(x_i)_{i\in J}$ جزئية منها حرةً أيضاً.
2. إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة، كان $\forall i\in I,\ x_i\neq 0$، وكان التطبيق $i\mapsto x_i$ متبايناً.
3. إذا كانت $(x_i)_{i\in J}$ جماعة جزئية مرتبطة خطياً من الجماعة $(x_i)_{i\in I}$، كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ نفسها مرتبطة خطيّاً.
4. تكون الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطيّاً إذا وفقط إذا أمكن التعبير عن أحد الأشعة x_{i_0} كعبارة خطيّة بالجماعة $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

الإثبات

نحتفظ برموز التعريف السابق.

1. هذه النتيجة واضحة، لأنّ مقصور التطبيق المتباين Ψ إلى الفضاء الجزئي $\mathbb{K}^J$ يكون متبايناً أيضاً.

2. الجملة المؤلفة من عنصر واحد هو 0 مرتبطة. وكذلك تكون كلُّ جملة من النمط (x,x). ونحصل على النتيجة المطلوبة باستخدام 1.

3. تنتج هذه الخاصة من نفي الخاصة 1.

4. إذا كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطيّاً، أمكننا أن نجد جماعة $(a_i)_{i\in I}$ شبه معدومة وغير معدومة بحيث $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$. ولمّا كانت $(a_i)_{i\in I}$ غير معدومة، وُجِدَ عنصر $i_0 \in I$ بحيث $a_{i_0}\neq 0$ ومن ثَمّ $x_{i_0} = -\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \frac{a_i}{a_{i_0}} x_i$. وبالعكس، إذا كان $x_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} b_i x_i$ حيث $(b_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ جماعة شبه معدومة من $\mathbb{K}$، وعرّفنا الجماعة شبه المعدومة وغير المعدومة $(a_i)_{i\in I}$ بأن $a_{i_0}=1$ و $a_i=-b_i$ حين يكون $i\in I\setminus\{i_0\}$، كان $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$ والجماعة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة. □

4-3.I. أمثلة:

- ليكن $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقية المعرّفة على $\mathbb{R}$. ولنعرّف أياً كانت $\alpha \in \mathbb{R}$ التابع

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x-\alpha|\ .$$

عندئذ تكون الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ حرّة.

في الحقيقة، لو كانت هذه الجماعة مرتبطة لأمكن التعبير عن أحد العناصر، وليكن f_β مثلاً، كتركيب خطيّ بالجماعة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{\beta\}}$. ومن ثَمّ أمكننا إيجاد $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ من $\mathbb{R}\setminus\{\beta\}$ و $a_1,\ldots,a_n$ من $\mathbb{R}$ بحيث

$$f_\beta = \sum_{k=1}^{n} a_k f_{\alpha_k}$$

ولّما كان $\beta \notin \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ كانت التوابع $(f_{\alpha_k})_{1\le k\le n}$ قابلة للاشتقاق عند β ومن ثَمّ كان f_β قابلاً للاشتقاق عند β وهذا تناقض واضح.

- ليكن $E = \mathbb{K}[X]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، وليكن لدينا تطبيقٌ متزايد تماماً: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ وجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{K}[X]$ بحيث $\deg P_n = \varphi(n)$. عندئذ تكون الجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حرّةً. وفي الحالة الخاصّة الموافقة لـ $\varphi(n) = n$ أياً كان $n \in \mathbb{N}$، تُكوِّن الجماعةُ $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أساساً لـ E.

- ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديلياً، ولتكن $n \in \mathbb{N}^*$. تكوِّن الجملة $(e_k)_{1\le k\le n}$، حيث e_k هو العنصر $(0,\ldots,0,\underset{k}{1},0,\ldots,0)$ من $\mathbb{K}^n$، أساساً للفضاء $\mathbb{K}^n$ نسميّه الأساس القانونيَ.

- ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديلياً، ولتكن I مجموعة غير خالية. تكوِّن الجماعة $(e_i)_{i\in I}$، حيث e_i هو العنصر $e_i = (\delta_{i,j})_{j\in I}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$، و $\delta_{i,j}$ هو رمز كرونيكر Kronecker الذي يساوي 1 عندما $i = j$ ويساوي 0 عندما $i \ne j$، أساساً للفضاء $\mathbb{K}^{(I)}$ نسميّه الأساس القانونيَ.

I.3-5. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل تبديلي $\mathbb{K}$ و u تطبيقاً من $\mathcal{L}(E,F)$
ولتكن I مجموعة غير خالية، و $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر E.

1. إذا كانت $(u(x_i))_{i\in I}$ جماعة حرّة، كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ حرةً أيضاً.
2. إذا كان u متبايناً وكانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة،كانت $(u(x_i))_{i\in I}$ جماعة حرّة.
3. إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة مولّدة، كان $\operatorname{Im} u = u(E) = \operatorname{vect}(((u(x_i))_{i\in I})$.

الإثبات

الإثبات بسيطٌ انطلاقاً من التعريف ونتركه تمريناً للقارئ. □

I.3-6. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $(e_i)_{i\in I}$ أساساً لـــ E ولتكن $(y_i)_{i\in I}$ جماعة من F. عندئذ يوجد تطبيق خطّي وحيد u من $\mathcal{L}(E,F)$ يُحقّق $\forall i\in I,\quad u(e_i)=y_i$.

الإثبات

لنثبت أوّلاً الوحدانيّة. ليكن u و v تطبيقين خطّين من $\mathcal{L}(E,F)$ يحقّقان

$$\forall i\in I,\quad u(e_i)=y_i \text{ و } \forall i\in I,\quad v(e_i)=y_i$$

عندئذ يكون $\forall i\in I,\quad (u-v)(e_i)=0$ ومن ثَمّ يكون $\{e_i : i\in I\}\subset \ker(u-v)$. ولَمّــا كان $\ker(u-v)$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E كان $E=\operatorname{vect}((e_i)_{i\in I})\subset\ker(u-v)$، ومنه ينتج أنّ $\forall x\in E,\quad (u-v)(x)=0$ وهذا يكافئ قولنا $u=v$.

لإثبات الوجود، نتأمّل التطبيقين الخطّيين

$$\Psi:\mathbb{K}^{(I)}\to E:(a_i)_{i\in I}\mapsto\sum_{i\in I}a_ie_i$$
$$\Theta:\mathbb{K}^{(I)}\to F:(a_i)_{i\in I}\mapsto\sum_{i\in I}a_iy_i$$

إنّ Ψ تقابلٌ خطّي لأنّ $(e_i)_{i\in I}$ أساس لـــ E، ومن ثَمّ يكون $u=\Theta\circ\Psi^{-1}$ تطبيقاً من $\mathcal{L}(E,F)$ ويحقّق وضوحاً الشرط $\forall i\in I,\quad u(e_i)=y_i$. □

4.I. المجموع المباشر والفضاءات المتتامّة

1-4.I. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن E_1 وE_2 فضاءين شعاعيّين جزئيين من E. نقول إنّ الفضاء الشعاعي الجزئي $F = E_1 + E_2$ مجموع مباشر للفضاءين الجزئيين E_1 و E_2، ونكتب عندها $F = E_1 \oplus E_2$، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

وبوجه عام، إذا كانت $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E، نقول إنّ الفضاء الشعاعي الجزئي $F = \sum_{i\in I} E_i$ مجموع مباشر للجماعة $(E_i)_{i\in I}$، ونكتب عندها $F = \bigoplus_{i\in I} E_i$، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط:

$$\forall i \in I, \quad E_i \cap \Big(\sum_{j\in I\setminus\{i\}} E_j \Big) = \{0\}.$$

☜ من المهم الإشارة هنا إلى أنّ الشرط السابق **لا** يكافئ قولنا $E_i \cap E_j = \{0\}$ وذلك أيّاً كان الدليلان المختلفان (i, j) في I^2.

2-4.I. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن E_1 وE_2 فضاءين شعاعيّين جزئيين من E. نقول إنّ E_1 و E_2 متتامّان إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $E = E_1 \oplus E_2$.

وبوجه عام، إذا كانت $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E، نقول إنّ الجماعة $(E_i)_{i\in I}$ متتامّة إذا وفقط إذا تحقّق الشرط: $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

3-4.I. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E. عندئذ يكون الفضاء الجزئي $F = \sum_{i\in I} E_i$ مجموعاً مباشراً إذا وفقط إذا كانت كلُّ جماعة شبهَ معدومة $(x_i)_{i\in I}$ في $E^{(I)}$ محقّقة للشرطين: $\forall i \in I,\ x_i \in E_i$ و $\sum_{i\in I} x_i = 0$، جماعةً معدومةً. أي:

$$\forall (x_i)_{i\in I} \in E^{(I)}, \quad \Big(\sum_{i\in I} x_i = 0\Big) \wedge (\forall i \in I,\ x_i \in E_i) \Rightarrow (\forall i \in I,\ x_i = 0).$$

الإثبات

لنفترض أولاً أنّ $F = \bigoplus_{i\in I} E_i$. ولتكن $(x_i)_{i\in I}$ ∋ $E^{(I)}$ جماعة شبه معدومة محقّقة للشرطين:

$$\forall i \in I,\ x_i \in E_i \quad \text{و} \quad \sum_{i\in I} x_i = 0 .$$

وليكن $k \ni I$. عندئذ يمكننا أن نكتبَ

$$x_k = \sum_{i\in I\setminus\{k\}} (-x_i) \in E_k \cap \Big(\sum_{i\in I\setminus\{k\}} E_i \Big) = \{0\}$$

ومن ثَمّ $x_k = 0$. هذا ما يثبتُ أنّ $\forall k \in I,\ x_k = 0$.

وبالعكس، ليكن $k \ni I$ ، وليكن y عنصراً من $E_k \cap \Big(\sum_{i\in I\setminus\{k\}} E_i \Big)$. توجد عندئذ جماعة شبه معدومة $(y_i)_{i\in I\setminus\{k\}}$ من $E^{I\setminus\{k\}}$ بحيث $y = \sum_{i\in I\setminus\{k\}} y_i$. نعرّف إذن الجماعة شبه المعدومة $(x_i)_{i\in I}$ ∋ $E^{(I)}$ كما يلي:

$$x_i = \begin{cases} -y_i & : \quad i \in I\setminus\{k\} \\ y & : \quad i = k \end{cases}$$

فيكون $\forall i \in I,\ x_i \in E_i$ و $\sum_{i\in I} x_i = 0$. إذن ينتج من الفرْض أنّ $x_k = 0$ ، ومن ثَمّ $y = 0$. نكون قد أثبتنا أنّ $E_k \cap \Big(\sum_{i\in I\setminus\{k\}} E_i \Big) = \{0\}$ وذلك أياً كان $k \ni I$. □

4-4.I. نتيجة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E ، بحيث يكون الفضاء الجزئي $F = \sum_{i\in I} E_i$ مجموعاً مباشراً. ولتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر $E\setminus\{0\}$ تحقّق الشرطَ $\forall i \in I,\ x_i \in E_i$. عندئذ تكون $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة.

الإثبات

لتكن $(a_i)_{i\in I}$ جماعة شبه معدومة من $\mathbb{K}^{(I)}$ ، بحيث $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$. فإذا عرّفنا $y_i = a_i x_i$ أياً كانت $i \ni I$ ، حصلنا على جماعة $(y_i)_{i\in I}$ ∋ $E^{(I)}$ ، تحقّق الشرطين $\sum_{i\in I} y_i = 0$ و $\forall i \in I,\ y_i \in E_i$. ولمّا كان المجموع $F = \bigoplus_{i\in I} E_i$ مباشراً كان $\forall i \in I,\ y_i = a_i x_i = 0$ ، بمقتضى المبرهنة السابقة، ولكن $\forall i \in I,\ x_i \neq 0$ إذن $\forall i \in I, a_i = 0$. □

I.4-5. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_k)_{1\le k\le n}$ جماعة منتهية من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E. يكـــون المجمـــوع $F = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ مجموعاً مباشراً، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط :

$$\forall k \in \{2,\dots,n\},\quad E_k \cap (E_1 + \cdots + E_{k-1}) = \{0\}$$

الإثبات

لتكن $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ من $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ بحيـــث $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. إذا كانت المجموعة $\mathcal{N} = \{j \in \mathbb{N}_n : x_j \neq 0\}$ غير خالية، عرّفنا $k = \max \mathcal{N}$ ومن ثَمّ يكـــون $0 \neq x_k = \sum_{i=1}^{k-1}(-x_i) \in E_k \cap (E_1 + \cdots + E_{k-1}) = \{0\}$ وهذا تناقض. إذن المجموعـــة $\mathcal{N}$ خالية أي: $\forall j \in \mathbb{N}_n,\ x_j = 0$. وهذا يثبت المطلوب استناداً إلى المبرهنة I.4-3. □

I.4-6. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E. تكون الجماعةُ $(E_i)_{i\in I}$ متتامّة، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط : أياً كان x في E توجد جماعة شبه معدومة وحيدة $(x_i)_{i\in I}$ في $E^{(I)}$ بحيث

$$x = \sum_{i\in I} x_i \quad و \quad \forall i \in I,\ x_i \in E_i$$

وإذا كانت الجماعة $(E_i)_{i\in I}$ جماعة متتامّة، وكـــان i في I، أسميـــنا التطبيـــق $p_i : E \to E$ الذي يربط بالعنصرِ x في E العنصرَ x_i، إسقاطاً للفضاء E على الفضاء الجزئي E_i توازياً مع الفضاء الجزئي $F_i = \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} E_j$. وتُحقّق جماعة التطبيقات $(p_i)_{i\in I}$ الخواص التالية:

1. أياً كانت i في I، فالتطبيق p_i خطّي.
2. أياً كان الدليلان المختلفان (i,j) في I^2، فإنّ $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$.
3. أياً كانت i في I، فإنّ $p_i \circ p_i = p_i$.
4. أياً كان x في E كانت الجماعة $(p_i(x))_{i\in I}$ شبه معدومة وكان $x = \sum_{i\in I} p_i(x)$.

ونعبّر عن الخاصّة الأخيرة بكتابة $I_E = \sum_{i\in I} p_i$.

الإثبات

لنفترض أولاً أنّ $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$، وليكن $x \in E$. عندئذ نظراً إلى أنّ $E = \sum_{i\in I} E_i$ توجد جماعة شبه معدومة $(x_i)_{i\in I} \in E^{(I)}$ بحيث : $\forall i \in I,\ x_i \in E_i$ و $x = \sum_{i\in I} x_i$. وإذا كانت $(y_i)_{i\in I} \in E^{(I)}$ جماعة أخرى شبه معدومة بحيث $\forall i \in I,\ y_i \in E_i$ و $x = \sum_{i\in I} y_i$ كانت الجماعة $(z_i)_{i\in I} \in E^{(I)}$، حيث $z_i = x_i - y_i$، جماعة شبه معدومة مُحقّقة للشرطين:

$\forall i \in I,\ z_i \in E_i$ و $\sum_{i\in I} z_i = 0$.

ومن ثَمّ $\forall i \in I,\ z_i = 0$، بمقتضى المبرهنة I.4-3. أي $\forall i \in I,\ x_i = y_i$.

ونترك الاقتضاء المعاكس، وهو أبسط، تمريناً للقارئ.

لتكن $k \in I$، ولنثبت أنّ التطبيق p_k خطّي. لتكن $(x,y) \in E^2$. توجد جماعتان شبه معدومتين $(x_i)_{i\in I} \in E^{(I)}$ و $(y_i)_{i\in I} \in E^{(I)}$ بحيث يكون لدينا من جهة أولى: $\forall i \in I,\ x_i \in E_i$ و $x = \sum_{i\in I} x_i$، ومن جهة ثانية: $\forall i \in I,\ y_i \in E_i$ و $y = \sum_{i\in I} y_i$.

عندئذ أياً كانت $\lambda \in \mathbb{K}$، يكُنْ

$$\forall i \in I, \quad x_i + \lambda \cdot y_i \in E_i \qquad \text{و} \qquad x + \lambda \cdot y = \sum_{i\in I} (x_i + \lambda \cdot y_i).$$

ومن ثَمّ $p_k(x + \lambda \cdot y) = x_k + \lambda \cdot y_k = p_k(x) + \lambda \cdot p_k(y)$. إذن $p_k \in \mathcal{L}(E)$.

لتكن $x \in E_k$، حيث $k \in I$. ولنعرّف الجماعة شبه المعدومة $(x_i)_{i\in I} \in E^{(I)}$ كما يلي:

$$x_i = \begin{cases} 0 & : \ i \in I \setminus \{k\} \\ x & : \ i = k \end{cases}$$

عندئذ يكون $\forall i \in I,\ x_i \in E_i$ و $x = \sum_{i\in I} x_i$ ولأن هذه الكتابة وحيدة نستنتج أنّ $p_k(x) = x$ وأنّ $p_i(x) = 0$ في حالة $i \neq k$.

ليكن $x \in E$ ولتكن $k \in I$. عندئذ يكون $p_k(x) \in E_k$ ومن المناقشة السابقة يكون $p_k(p_k(x)) = p_k(x)$، ويكون $p_i(p_k(x)) = 0$ في حالة $i \neq k$. وهذا يثبت الخلاصتين 2. و3. أمّا الخاصّة الأخيرة فهي واضحة من التعريف. □

I.4-7. حالة خاصّة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيّين جزئيين من E. يكون الفضاءان E_1 و E_2 متتامّين، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط:
أيّاً كان $x \in E$ توجد ثنائيّة وحيدة $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ بحيث

$$x = x_1 + x_2$$

وإذا عرّفنا $p_1 : E \to E,\ x \mapsto x_1$ و $p_2 : E \to E,\ x \mapsto x_2$، كان التطبيقان p_1 و p_2 خطّيين وكان $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ و $p_1 \circ p_1 = p_1$ و $p_2 \circ p_2 = p_2$ وأخيراً $I = p_1 + p_2$. و يسمّى p_1 الإسقاط الخطّي لـ E على E_1 توازياً مع E_2، وكذلك يسمّى p_2 الإسقاط الخطّي لـ E على E_2 توازياً مع E_1.

I.4-8. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. نقول عن تطبيق خطيّ p من $\mathcal{L}(E)$ إنه إسقاط إذا وفقط إذا كان $p \circ p = p$، (ونكتب أيضاً $p^2 = p$).

I.4-9. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $p \in \mathcal{L}(E)$ إسقاطاً. عندئذ يوجد فضاءان شعاعيّان جزئيان E_1 و E_2 من E بحيث يكون $E = E_1 \oplus E_2$، ويكون p هو الإسقاط الخطّي لـ E على E_1 توازياً مع E_2.

الإثبات

لنضع $E_1 = \operatorname{Im} p$ و $E_2 = \ker p$.

إذا كان $x \in E_1 \cap E_2$، وُجِدَ عنصر $y \in E$ بحيث $x = p(y)$ وكان $p(x) = 0$.
وعندئذ يكون $x = p(y) = p \circ p(y) = p(x) = 0$. ومنه $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

ومن ناحية أخرى، إذا كان $x \in E$ كـان $x = x_1 + x_2$ حيـث $x_1 = p(x) \in E_1$ و $x_2 = x - p(x) \in E_2$، (لأنّ $p(x_2) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$). ومنـه نستنتج أنّ $E = E_1 \oplus E_2$.

وأخيراً لقد وجدنا فيما سبق أنّه أيّاً كان $x \in E$ فإنّ $p(x) = x_1$ هو الإسقاط الخطيّ لـ x على الفضاء الجزئي E_1 توازياً مع E_2. □

سننهي هذه الفقرة بذكر خاصّتين بسيطتين نترك إثباقما المباشر تمريناً للقارئ:

I.4-10. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة متتامّة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E. نفترض أنّه، أياً كان i و I، يوجد أساس $(e_{i,j})_{j\in J_i}$ للفضاء الجزئي E_i. عندئذ تكوِّن الجماعة التالية

$$(e_{i,j})_{(i,j)\in K} \quad \text{حيث} \quad K = \bigcup_{\ell\in I}(\{\ell\}\times J_\ell)$$

أساساً للفضاء E.

I.4-11. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_k)_{1\le k\le n}$ جماعة متتامّة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من E. عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : E_1\times E_2\times\cdots\times E_n \to E,\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)\mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$$

تقابلاً خطيّاً.

I.5. فضاءُ خارجِ القسمة

I.5-1. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن H فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E. تعرِّف العلاقة الثنائية

$$\forall(x,y)\in E\times E,\quad x\,\Re_H\, y \Leftrightarrow x-y\in H$$

علاقة تكافؤ على E. نرمز بالرمز E/H إلى مجموعة صفوف التكافؤ بالقياس إلى $\Re_H$.

وإذا كان $[x]$ و $[y]$ عنصرين من E/H وكان λ و $\mathbb{K}$، كان كلٌّ من المجموعتين:

$$[x]+[y]=\{x_1+y_1 : (x_1,y_1)\in[x]\times[y]\}$$
$$\lambda\cdot[x]=\{\lambda\cdot x_1 : x_1\in[x]\}$$

عنصراً من E/H. يسمح لنا هذا بتزويد المجموعة E/H بقانوني التشكيل $(+)$ و $(\cdot)$ اللذين يجعلان من $(E/H,+,\cdot)$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، نسمّيه فضاءَ خارجِ قسمة E على الفضاء الجزئي H.

ويكون في هذه الحالة التطبيقُ $Q_H : E\to E/H : x\mapsto[x]$ تطبيقاً خطيّاً غامراً، نسميّه الغمر القانوني.

الإثبات

الإثبات تحقّقٌ مباشر من التعاريف. نترك تفاصيله للقارئ. □

2-5.I. مبرهنة : ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن u تطبيقاً خطّياً من $\mathcal{L}(E,F)$. عندئذ يوجد تقابلٌ خطّي $\tilde{u} : E/\ker u \to \operatorname{Im} u$ يحقّق $u = i \circ \tilde{u} \circ Q$ حيث $Q : E \to E/\ker u, x \mapsto [x]$ هو الغمر القانوني، و $i : \operatorname{Im} u \to F, x \mapsto x$.

الإثبات

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ Q\downarrow & & \uparrow i \\ E/\ker u & \xrightarrow{\tilde{u}} & \operatorname{Im} u \end{array}$$

ليكن $[x]$ عنصراً من $E/\ker u$. عندئذ يأخذ u قيمة واحدة على جميع عناصر $[x]$. أي

$$\operatorname{card}\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\} = 1$$

وذلك لأنه إذا كان $(\alpha, \beta) \in [x] \times [x]$ كان $\alpha - \beta \in \ker u$ ، ومن ثَـمّ $u(\alpha - \beta) = 0$. أي $u(\alpha) = u(\beta)$.

لنعرّف إذن $\tilde{u}([x])$ بأنه العنصر الوحيد الموجود في المجموعة $\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\}$ أي

$$\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\} = \{\tilde{u}([x])\}$$

نلاحظ مباشرة أنّ $\tilde{u}$ تطبيق من $E/\ker u$ إلى $\operatorname{Im} u$. وإذا كان $[x]$ و $[y]$ عنصرين من E/H وكان $\lambda \in \mathbb{K}$، كان لدينا $[x + \lambda \cdot y] = [x] + \lambda \cdot [y]$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} \tilde{u}([x] + \lambda \cdot [y]) &= \tilde{u}([x + \lambda \cdot y]) = u(x + \lambda \cdot y) \\ &= u(x) + \lambda \cdot u(y) = \tilde{u}([x]) + \lambda \cdot \tilde{u}([y]) \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنّ $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E/\ker u, \operatorname{Im} u)$. ومن جهة أخرى، مـن الواضـح أنّ $\tilde{u}$ تطبيق غامر لأنّ $\forall x \in E, \quad \tilde{u}([x]) = u(x)$. وهو أيضاً متباينٌ لأنّ

$$[x] \in \ker \tilde{u} \Rightarrow \tilde{u}([x]) = 0 \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker u \Rightarrow [x] = 0$$

نستنتج أنّ $\tilde{u}$ تقابل خطّي من $\mathcal{L}(E/\ker u, \operatorname{Im} u)$. وأخيراً تنتج العلاقة $u = i \circ \tilde{u} \circ Q$ مـن المساواة الواضحة : $\forall x \in E, \quad \tilde{u}([x]) = u(x)$. □

تمرينات

التمرين 1. ليكن $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ تطبيقاً متبايناً. ولتكن $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جماعة من $\mathbb{K}[X]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ $\forall n\in\mathbb{N},\ \deg(P_n)=\varphi(n)$. أثبت أنّ الجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حرّة.

التمرين 2. ليكن $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ؛ فضاءَ التوابع من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. نعرّف أياً كان α و $\mathbb{R}$ التابع f_α بالعلاقة $f_\alpha(x)=|x-\alpha|$. أثبت أن الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ حرّة في E.

التمرين 3. ليكن $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ؛ فضاءَ التوابع من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. نعرّف أياً كان α و $\mathbb{R}_+^*$ التابع f_α بـ $f_\alpha(x)=\cos\alpha x$. أثبت أن الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}$ حرّة في E. مساعدة: احسب $I(\alpha,\beta)=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\cos(\alpha t)\cos(\beta t)\mathrm{d}t$.

التمرين 4. ليكن $E=\mathbb{K}_n[X]$ ؛ فضاء كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$ والتي لا تزيد درجتها عن n. أثبت أننا نعرّف تطبيقاً خطياً φ من E إلى E بالعلاقة

$$\varphi(P)=X(1-X)P'(X)+nXP(X).$$

واستنتج أن الجملة $\left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\le k\le n}$ حرّة في E. عبّر أياً كان p و $\{0,1,\ldots,n\}$ عن X^p كتركيب خطيّ لعناصر الجملة $\left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\le k\le n}$، ماذا تستنتج؟

التمرين 5. ليكن $E=\mathbb{K}_n[X]$ ؛ فضاء كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$ والتي لا تزيد درجتها عن n. ولتكن $\alpha_n,\ldots,\alpha_1,\alpha_0$ عناصرَ متباينةً مثنى مثنى من $\mathbb{K}$. نعرّف أياً كان j و $\{0,1,\ldots,n\}$ كثير الحدود ℓ_j بالعلاقة $\ell_j(X)=\prod\limits_{\substack{0\le k\le n\\ k\ne j}}\frac{X-\alpha_k}{\alpha_j-\alpha_k}$. أثبت أن الجملة $(\ell_j)_{0\le j\le n}$ أساس للفضاء E. وأن كل كثير حدود P من E يكتب بطريقة وحيدة بالشكل

$$P=\sum_{k=0}^{n}P(\alpha_k)\cdot\ell_k.$$

التمرين 6. لتكن $(e_k)_{0\le k\le n}$ جملة حرّة في فضاء شعاعي E على حقل تبديلي IK. ولتكن $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ عناصرَ متباينةً مثنى مثنى من IK. أثبت أن الجملة $(f_k)_{0\le k\le n}$ المعرّفة بالعلاقات $f_k = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i)^k e_i$ جملة حرّة أيضاً.

التمرين 7. ليكن E فضاء شعاعياً على حقل IK عدده المميّز يساوي 0. ولنذكّر بأن تطبيقاً خطياً p من E إلى E هو إسقاط إذا وفقط إذا كان $p \circ p = p$.

1. ليكن p إسقاطاً لـ E. أثبت أنه يوجد فضاءان شعاعيّان جزئيان متتامّان E_1 و E_2 من E، بحيث يكون p إسقاطاً لـ E على E_1 توازياً مع E_2.
2. ليكن p إسقاطاً لـ E، ولتكن λ في $\mathrm{IK}\setminus\{0,1\}$. أثبت أن $p - \lambda I_E$ تشاكل تقابلي خطّي.
3. ليكن p و q إسقاطين لـ E. أثبت أن $p+q$ إسقاط لـ E إذا و فقط إذا كان $p \circ q = q \circ p = 0$. عيّن في هذه الحالة صورة ونواة $p+q$.
4. ليكن p و q إسقاطين لـ E، حيث $p \circ q = 0$. أثبت أن $r = p + q - q \circ p$ إسقاط لـ E وعيّن صورته ونواته.
5. نقول عن تطبيق خطيّ $u: E \to E$ إنه يحافظ على الفضاء الشعاعي الجزئي E_1 من E إذا وفقط إذا كان $u(E_1) \subset E_1$. ليكن p إسقاطاً لـ E، و u تطبيقاً خطياً من E إلى E. أثبت أن التطبيقين u و p يتبادلان إذا وفقط إذا كان u يحافظ على كل من $\ker p$ و $\mathrm{Im}\, p$.
6. ليكن $u: E \to E$ تطبيقاً خطياً يحقق $u^m = I_E$ حيث m في IN^*. نفترض أن u يحافظ على الفضاء الجزئي E_1 من E. ليكن p إسقاطاً لـ E على E_1. أثبت أن التطبيق الخطيّ المعرّف بالعلاقة

$$q = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p \circ u^{m-k}$$

هو إسقاط لـ E على E_1، وأن u يحافظ على الفضاء الجزئي $\ker q$.

التمرين 8. ادرس في $C(]0,1[,\mathrm{IR})$، الارتباط الخطي للجملة $(f, f\circ f, f\circ f\circ f)$ حيث $f(x) = \ln(1+x)$.

التّمرين 9. ليكن $E = \mathbb{K}_n[X]$ ، فضاء كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$ والتي لا تزيد درجتها عن n. ولتكن $\alpha_n, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ عناصرَ متباينةً مثنى مثنى من $\mathbb{K}$. نعرّف أياً كان j في $\{0,1,\ldots,n\}$ كثير الحدود P_j بالعلاقة $P_j(X) = (X - \alpha_j)^n$. أثبت أن الجملة $(P_j)_{0 \le j \le n}$ حرّة في E.

التّمرين 10. ليكن E فضاء التوابع من الصف C^∞ على $\mathbb{R}$ والدوريّة ذات الدور 2π. وليكن T التطبيق الخطيّ من $\mathcal{L}(E)$ المعرّف بالعلاقة $T(f) = f''$. عيّن صورة ونواة T.

التّمرين 11. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، و ليكن $f : E \to E$ تطبيقاً خطياً.

1. أثبت أن: $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Leftrightarrow \ker f^2 = \ker f$.
2. أثبت أن: $E = \ker f + \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.
3. نفترض أن بُعد E منتهٍ[1]. أثبت تكافؤ الشروط الأربعة السابقة.

التّمرين 12 ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$ عدده المميِّز لا يساوي 2.

1. ليكن F فضاءً شعاعياً جزئياً من E ولا يساوي E. وليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى E ومحققاً للشرط:

$$\forall x \in E \backslash F, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, \quad u(x) = \lambda_x \cdot x$$

أثبت أنه يوجد عدد λ في $\mathbb{K}$ بحيث $u = \lambda I_E$.

2. ليكن a عنصراً من $E \backslash \{0\}$. عيّن مجموعة التطبيقات الخطيّة f من $L(E)$ والتي تكون من أجلها الجملة $(a, x, f(x))$ مرتبطة أياً كانت x من E.

---

[1] يتطلّب هذا السؤال بعض الدراية بالفصل اللاحق.



الفصل الثاني

الفضاءات الشعاعيّة المنتهية البُعد

II.1.عموميات

II.1-1.مبرهنة : ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(e_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر E .
إنّ الخواص التالية متكافئة:

1. الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ أساس لـــ E .
2. الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة مولّدة أصغرية. (أي إنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ لا تولّد E أيــاً كان $j \in I$).
3. الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة أعظمية. (أي تكون مرتبطة خطياً كلُ جماعة تُمدّد تمامــاً الجماعة السـابقة).

الإثبات

1. $\Leftarrow$ 3. إذا لم يكن ذلك صحيحاً أمكن توسيع مجموعة الأدلّـــة إلى $J = I \cup \{j\}$ ، حيــــث $j \notin I$ ، وإيجاد عنصرٍ $e_j \in E$ بحيث تكون الجماعة الجديدة $(e_i)_{i\in J}$ حــرّةً. و لكـــنَ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ أساس لـــ E إذن توجد جماعة شبه معدومة $(\alpha_i)_{i\in I}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$ بحيث $e_j = \sum_{i\in I}\alpha_i e_i$ وهذا يتناقض مع كون الجماعة $(e_i)_{i\in J}$ حرّة.

3. $\Leftarrow$ 2. : ليكن $x \in E$ وليكن $j \notin I$ نضع $J = I \cup \{j\}$ و $e_j = x$. ولمّا كانت الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ حرةً أعظميّة كانت الجماعة $(e_i)_{i\in J}$ مرتبطة. إذن توجد جماعة شبه معدومــة $(\alpha_i)_{i\in J}$ من $\mathbb{K}^{(J)}$ بحيث $\sum_{i\in J}\alpha_i e_i = 0$ و $(\alpha_i)_{i\in I} \neq 0$. ولأنّ $\alpha_j = 0$ يتناقض مـــع كون الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ حرة، إذن $\alpha_j \neq 0$ و بالإمكان القسمة على α_j . عندئذ يكون $x = e_j = \sum_{i\in I} -\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\cdot e_i$ ومن ثَمّ تكون الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ مولّدة، و هي أصغرية لأنهـــا حرّة.

2. $\Leftarrow$ 1. : إذا لم تكن الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ حرةً وُجدَ i_0 ∋ I بحيث يكون العنصر e_{i_0} تركيباً خطياً في عناصر $(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$. ومن ثَمّ تكون الجماعة $(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ مولّدة وهذا يتناقض مع كون الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة مولّدة أصغرية. □

II.1-2.مبرهنة : ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ جملة من E. نضع $F = \text{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. عندئذ تكون كل جملة $(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})$ من F مرتبطة خطيّاً.

الإثبات

سنثبت هذه المبرهنة بالتدريج على n.

إذا كانت $n = 1$ فإنّ $F = \{\lambda \cdot e_1, \lambda \in \mathbb{K}\}$. فإذا كان f_1 و f_2 من F وُجدَ عددان λ_1 و λ_2 من $\mathbb{K}$ بحيث $f_i = \lambda_i e_1$ و $i = 1,2$. عندئذ يكون $\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 = 0$ و تكون الجملة (f_1, f_2) مرتبطة خطياً. (لاحظ أنّ حالة $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ تافهة).

لنفترض صحة الخاصة عند قيمة $n-1$. و لنفترض أنّ $(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})$ جملة من $F = \text{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. عندئذ توجد جملة $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n+1\\ 1\le j\le n}}$ من $\mathbb{K}$ بحيث :

$$\begin{array}{ccccccccc} f_1 & = & \alpha_{11}\, e_1 & + & \alpha_{12}\, e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\, e_n \\ f_2 & = & \alpha_{21}\, e_1 & + & \alpha_{22}\, e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}\, e_n \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ f_{n+1} & = & \alpha_{n+1,1} e_1 & + & \alpha_{n+1,2} e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{n+1,n} e_n \end{array}$$

إذا كان $\alpha_{1n} = \alpha_{2n} = \cdots = \alpha_{n+1,n} = 0$ كانت الجملةُ $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ جملةً من عناصر $\text{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$، وبمقتضى فرْض التدريج تكون هذه الجملة مرتبطة خطيّاً.

لنفترض إذن أنّ $\alpha_{k,n} \neq 0$، ولنضع أياً كان j من $\mathbb{N}_{n+1}\setminus\{k\}$:

$$\tilde{f}_j = f_j - \frac{\alpha_{j,n}}{\alpha_{k,n}} f_k \in \text{vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$$

عندئذ تكون $(\tilde{f}_j)_{j\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus\{k\}}$ جملة من $\text{vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$ فهي إذن مرتبطة خطياً بمقتضى فرْض التدريج. ومن ثَمّ توجد جملة غير معدومة $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus\{k\}}$ من $\mathbb{K}$ بحيث $\sum_{j\neq k} \lambda_j \tilde{f}_j = 0$

ومنه $\sum_{j\neq k} \lambda_j f_j - \left(\sum_{j\neq k} \frac{\lambda_j \alpha_{j,n}}{\alpha_{n,k}}\right) f_k = 0$ وهذا يثبت أنّ $(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})$ جملة مرتبطة. □

II.1-3.نتيجة : ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. إذا كانت $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ جملة مولدة لـ E كانت كلُّ جماعة $(f_j)_{j\in J}$ تُحقّق الشرط $\operatorname{card} J > n$ مرتبطةً خطيّاً.

II.2. بُعد فضاء شعاعي

II.2-1. تعريف : ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. نقول إنّ E منتهي البعد إذا وفقط إذا وُجدتْ فيه جماعة مولّدة ومنتهية (أي $(e_i)_{i\in I}$ مع $\operatorname{card} I < +\infty$).

II.2-2. مبرهنة : ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(e_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر E. نفترض أنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة مولّدة وأنه توجد مجموعة جزئية غير خالية J من I بحيث تكون الجماعة $(e_i)_{i\in J}$ حرةً. عندئذ توجد K مجموعة جزئية من I تحـوي J أي $(I \supset K \supset J)$ بحيث تكوِّن الجماعة $(e_i)_{i\in K}$ أساساً لـ E.

الإثبات

سنقدّم البرهان فقط في حالة كون الفضاء الشعاعي E منتهي البعد. الحالـة العامـة تتطلّب تقنيات إضافية : (توطئة Zorn) وهي خارجة عن إطار الكتاب.

لّما كان E فضاءً منتهي البُعد يوجد عدد طبيعي n بحيث تكون كلُّ جملـة $(f_j)_{j\in L}$ تُحقّق الشرطَ $\operatorname{card} L > n$ مرتبطةً خطياً. وذلك استناداً إلى النتيجة II.1-3.

لنعرِّف

$$\mathscr{A} = \{H \subset I : (J \subset H) \wedge (\text{جماعة حرّة } (e_i)_{i\in H})\}$$

من الواضح أنّ $J \in \mathscr{A}$ وأنّه بمقتضى الملاحظة السابقة $\forall H \in \mathscr{A},\ \operatorname{card} H \le n$. إذن يوجد $K \in \mathscr{A}$ بحيث $\operatorname{card} K = \max\{\operatorname{card} H : H \in \mathscr{A}\}$.

من جهة أولى، لّما كان $K \in \mathscr{A}$ كانت الجملة $(e_i)_{i\in K}$ حرّة ومحقّقة $J \subset K \subset I$.

ومن جهة ثانية، إذا لم تكن الجملة $(e_i)_{i\in K}$ مولّدةً وُجدَ عنصر $j \in I\backslash K$ بحيث يكون $e_j \notin \operatorname{vect}((e_i)_{i\in K})$، ولكنّ هذا يقتضي أنّ الجملة $(e_i)_{i\in K\cup\{j\}}$ جملة حرّة في E ومن ثَمّ أنّ $K \cup \{j\} \in \mathscr{A}$، وهذا يتناقض مع تعريف K. إذن الجملة $(e_i)_{i\in K}$ مولّدة وهي من ثَمّ تكوِّن أساساً لـ E. □

II.2-3. نتيجة: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. لنفترض أنّ $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_r)$ جملة حرّة من E و $\mathcal{G} = (g_1,\dots,g_m)$ جملة مولّدة لـ E . عندئذ يمكننا أن نتمّم $\mathcal{E}$ إلى أساس $(e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n)$ للفضاء E وذلك بأخذ العناصر $e_{r+1},\dots,e_n$ من المجموعة $\{g_k : k \le m\}$.

II.2-3. مبرهنة وتعريف : ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$، نفترض أنّ $E \neq \{0\}$. عندئذ يوجد عددٌ طبيعيٌ وحيدٌ n بحيث يحقّقُ كلُ أساس $(e_i)_{i\in I}$ للفضاء E الشرطَ $n = \operatorname{card} I$.

نسمّي العددَ n بُعدَ الفضاء الشعاعي E على الحقل $\mathbb{K}$، و نرمز إليه بالرمز $\dim_{\mathbb{K}} E$، أو ببساطة $\dim E$، إذا لم يكن هنالك مجال للالتباس.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ و $\mathcal{F} = (f_1,\dots,f_m)$ أساسين لـ E . لمّا كانت $\mathcal{E}$ جملة مولّدة، ولأنّ الجملة $\mathcal{F}$ جملة حرّة، كان $n \ge m$ وذلك بمقتضى النتيجة II.1-3 . و بأسلوب مماثل، الجملةُ $\mathcal{F}$ جملة مولّدة و الجملة $\mathcal{E}$ جملة حرّة إذن $m \ge n$، و من ثَمّ $m = n$. □

II.2-4. ملاحظة: نصطلح أنّ $\dim\{0\} = 0$، و أنّه إذا لم يكن الفضاء الشعاعي E منتهي البعد على $\mathbb{K}$ فإنّ $\dim_{\mathbb{K}} E = +\infty$.

II.2-5. نتيجة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. و ليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من E . عندئذ يكون F فضاءً شعاعياً منتهي البعد ويكون $\dim F \le \dim E$.

الإثبات

إذا كان $F = \{0\}$ تمّ المطلوب. نفترض أنّ $F \neq \{0\}$ و لنعرّف $\mathscr{A}$ مجموعة الأعداد الطبيعية q في $\mathbb{N}^*$ حيث توجد جملة $(x_1,\dots,x_q)$ حرّة في F .

لمّا كانت كلُّ جملة حرّة في F حرّةً في E كان $\varnothing \neq \mathscr{A} \subset \mathbb{N}_{\dim E}$ لأنّ $F \neq \{0\}$.

ليكن $p = \max \mathscr{A} \le \dim E$ عندئذ توجد جملة $(x_1,\dots,x_p)$ حرّة في F وهي أعظمية في F فهي تكوّن أساساً لـ F . و منه $p = \dim F$ و هذا هو المطلوب. □

II.2-6. مبرهنة: إذا كان E و F فضاءين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$ و كان بُعداهما منتهيين كان $E \times F$ فضاء شعاعياً منتهي البُعد على الحقل $\mathbb{K}$ و تحقّقت العلاقة:

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

الإثبات

إنّ هذه النتيجة صحيحة لأنه إذا تأملنا أساساً $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ لـــ E، وتأملنا كذلك أساساً $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_m)$ لـــ F. كانت الجملة

$$((e_1,0),(e_2,0),\ldots,(e_n,0),(0,f_1),(0,f_2),\ldots(0,f_m))$$

أساساً لـــ $E \times F$. □

II.2-7. تعميم: لتكن $E_1, E_2, \ldots, E_n$ فضاءات شعاعية منتهية البعد على حقل $\mathbb{K}$. عندئـــذ يكون $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد أيضاً و يكون $\dim(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

II.2-8. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ بُعد كلّ مـــن E و F منته. عندئذ تكون الخاصّتان التاليتان متكافئتين:

1. يوجد تقابلٌ خطي u بين E و F، (ونكتب عندئذ $E \cong F$).
2. $\dim E = \dim F$.

الإثبات

1. ⇐ 2. ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً لـــ E. ولنعرّف $f_i = u(e_i)$ أياً كانت i في $\mathbb{N}_n$. إنّ الجملة $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ أساس لـــ F. وذلك لأنّه من جهة أولى: الجملة $\mathcal{E}$ جملـــة حرّة والتطبيق u متباينٌ إذن $\mathcal{F}$ جملة حرّة، ومن جهة ثانية لأنّ $\mathcal{E}$ جملة مولّـــدة ولأنّ التطبيق u غامرٌ ينتج أنّ $\mathcal{F}$ جملة مولّدة. ومن ثَمّ $\dim F = n = \dim E$.

2. ⇐ 1. ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً لـــ E وليكن $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ أساساً لـــ F. إنّ التطبيق الخطي $u : E \to F$ المعرّف بـــ $\forall i \in \mathbb{N}_n, u(e_i) = f_i$ هو التقابل الخطّـــي المطلوب. □

II.2-9. نتيجة: ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ يكون E مُشاكلاً تقابلياً للفضاء $\mathbb{K}^{\dim E}$. أي $E \cong \mathbb{K}^{\dim E}$.

تمرين: ليكن $\mathbb{F}$ حقلاً منتهياً، إذن $\operatorname{card}\mathbb{F} = p^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و p عددٌ أولي.

في الحقيقة، ليكن p العددَ المميّز للحقل $\mathbb{F}$. نعلم أنّ p عـــدد أولي لأنّ $\mathbb{F}$ حـــلقة تامّة. ومن ثَمّ يكون $\mathbb{K} = Z/pZ$ حقلاً جزئياً من $\mathbb{F}$، و يمكن اعتبار $\mathbb{F}$ فضاء شعاعياً على $\mathbb{K}$. و لّما كان $\mathbb{F}$ حقلاً منتهياً كان بُعدُ الفضاء الشعاعي $\mathbb{F}$ على الحقل $\mathbb{K}$ منتهياً. لنضـــع $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$. عندئذ يكون $\mathbb{F} \cong \mathbb{K}^n$ بمقتضى النتيجة السابقة ومنه $\operatorname{card}\mathbb{F} = p^n$.

II.2-10. نتيجة: ليكن E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. لنفترض أنّ $E_1, E_2, \dots, E_n$ فضاءات شعاعية جزئية أبعادها منتهية من E. ولنفترض أنّ المجموع $\sum_{i=1}^{n} E_i$ مباشر. عندئذ يكون الفضاء $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ منتهي البعد، ويكون $\dim \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

الإثبات

في الحقيقة إنّ التطبيق

$$\varphi : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \to \bigoplus_{i=1}^{n} E_i,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$$

تقابلٌ خطي استناداً إلى المبرهنة I.4-11. □

II.2-11. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. و ليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من E. يوجد فضاء شعاعي جزئي G من E بحيث $E = F \oplus G$.

الإثبات

ليكن $(e_1, \dots, e_r)$ أساساً لــ F. يمكننا بناءً على المبرهنة II.2-3. أن نجد $e_{r+1}, \dots, e_n$ في E بحيث يكون $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ أساساً لــ E. نعرّف إذن

$$G = \operatorname{vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$$

ونتحقّق بسهولة أنّ $E = F \oplus G$. □

ملاحظة: إنّ الخاصة السابقة صحيحة ولو لم يكن $\dim E < +\infty$.

II.2-12. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$، و ليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من E. عندئذ يكون بُعد E/F منتهياً، ويكون
$\dim E/F = \dim E - \dim F$.

الإثبات

ليكن G فضاء شعاعياً جزئياً من E يحقّق $E = F \oplus G$، (موجود استناداً إلى المبرهنة II.2-11). ولنتأمّل $\Phi : G \to E/F,\ x \mapsto [x]$، مقصور الغمر القانوني على الفضاء الجزئي G. إنّ Φ تشاكل تقابلي خطي.

في الحقيقة، إنّ Φ خطي لأنه مقصور تطبيق خطي على فضاء شعاعي جزئي من منطلقه. و هو متباين لأنّ

$$\begin{aligned} x \in \ker\Phi &\Leftrightarrow (x \in G) \wedge ([x] = 0) \\ &\Leftrightarrow (x \in G) \wedge (x \in F) \\ &\Leftrightarrow x \in G \cap F = \{0\} \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

وأخيراً إذا كان $x \in E$ كان $x = x_F + x_G$ و من ثَمّ $[x] = [x_G] = \Phi(x_G)$ إذن Φ غامر. ينتج من ذلك أنّ $\dim E/F = \dim G = \dim E - \dim F$. وهو المطلوب إثباته. ❑

II.2-13. تعريف: إذا كان E فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، و كان F فضاء شعاعياً جزئياً من E. نقول إنّ تمام بُعد F منته و نكتب $\operatorname{codim}_E F < +\infty$ إذا وفقط إذا كان بُعد الفضاء E/F منتهياً. ويكون بالتعريف $\operatorname{codim}_E F = \dim E/F$. لقد أثبتنا في المبرهنة السابقة أنه إذا كان بُعد E منتهياً كان $\operatorname{codim}_E F = \dim E - \dim F$.

II.2-14. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. و ليكن u تطبيقاً خطياً من E إلى فضاء شعاعي F على الحقل $\mathbb{K}$، أي $u \in \mathcal{L}(E, F)$. عندئذ يكون بُعد $\operatorname{Im} u$ منتهياً ويكون $\dim E = \dim(\ker u) + \dim(\operatorname{Im} u)$.

الإثبات

لقد أثبتنا في المبرهنة I.5-2. أنّ $E/\ker u \cong \operatorname{Im} u$ ومن ثَمّ يكون
$\dim \operatorname{Im} u = \dim E/\ker u = \dim E - \dim \ker u$. ❑

15-2.II. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين أبعادهما منتهية على حقـــل $\mathbb{K}$. عندئـــذ يكون بُعد الفضاء $\mathcal{L}(E,F)$ منتهياً ويكون $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \cdot \dim F$.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً لـــ E . لمّا كان التطبيق الخطي يتعيّن بطريقة وحيـــدة انطلاقاً من صورة أساس للمنطلق، كان التطبيق

$$\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to F^n,\ u \mapsto (u(e_1), u(e_2),\ldots,u(e_n))$$

تقابلاً خطياً، ومن ثَمّ

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim F^n = \sum_{i=1}^{n} \dim F = \dim E \cdot \dim F \quad \square$$

3.II. رتبة جماعة أشعة و رتبة تطبيق خطي

1-3.II. تعريف: لتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من فضاء شعاعي E . إذا كان بُعـــد $\mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$ منتهياً قلنا إنّ رتبة الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ منتهية وكتبنا $\mathrm{rg}((x_i)_{i\in I}) = \dim \mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$.

2-3.II. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً بين فضاءين شعاعيين E و F . ولتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من E رتبتها منتهية r . عندئذ تكون رتبة الجماعة $(u(x_i))_{i\in I}$ منتهية أيضاً ويكون $\mathrm{rg}((u(x_i))_{i\in I}) \le \mathrm{rg}((x_i)_{i\in I})$.

الإثبات

ليكن $G = \mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$ عندئذ $r = \dim G = \mathrm{rg}((x_i)_{i\in I})$. وليكن التطبيق الخطّي v مقصور u إلى G أي $v = u_{|G} \in \mathcal{L}(G,F)$. إنّ $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{vect}((u(x_i))_{i\in I})$. ومن ثَمّ

$$r = \dim G = \dim \ker v + \dim \mathrm{Im}\, v \ge \dim \mathrm{Im}\, v = \mathrm{rg}(u(x_i))_{i\in I}) \quad \square$$

3-3.II. تعريف: ليكن u تطبيقاً خطياً بين فضاءين شعاعيين E و F . إذا كـــان بُعـــد $\mathrm{Im}\, u$ منتهياً قلنا إنّ رتبة u منتهية و كتبنا $\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u$.

ونلاحظ من جهة أولى أنّه إذا كان $\dim E < +\infty$ كان $\dim E = \dim \ker u + \mathrm{rg}\, u$. وأنه من جهة ثانية إذا كان $\dim F < +\infty$ كان $\mathrm{rg}\, u \le \dim F$. إذن

$$\forall u \in \mathcal{L}(E,F),\quad \mathrm{rg}\, u \le \min(\dim E, \dim F)$$

ونلاحظ أيضاً أنّه إذا كان بُعد كلّ من E و F منتهياً كان التكافؤان الهامان التاليان:

- u متباين $\Leftrightarrow \dim E = \operatorname{rg} u$ ،
- u غامر $\Leftrightarrow \dim F = \operatorname{rg} u$.

II.3-4. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين أبعادهما منتهية بحيث $\dim E = \dim F = n$. وليكن $u \in \mathcal{L}(E,F)$. عندئذ يكون هناك تكافؤ بين الخواص التالية:

1. u غامر.
2. u متباين.
3. u تقابل.
4. $n = \operatorname{rg} u$.
5. u قَلوب من اليسار. (أي يوجد v من $\mathcal{L}(F,E)$ بحيث $v \circ u = I_E$).
6. u قَلوب من اليمين. (أي يوجد v من $\mathcal{L}(E,F)$ بحيث $u \circ v = I_F$).

الإثبات

الإثبات سهل و متروك للقارئ. □

II.3-5. مبرهنة: لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعية ذات أبعاد منتهية على حقل $\mathbb{K}$. و ليكن $u \in L(E,F)$ و $v \in L(F,G)$. عندئذ

1. إنّ $\operatorname{rg}(v \circ u) \le \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.
2. إذا كان u غامراً فإنّ $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$.
3. إذا كان v متبايناً فإنّ $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.

الإثبات

1. لدينا من جهة أولى $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im}(u))$ و من ثَمّ $\operatorname{rg}(v \circ u) \le \operatorname{rg}(u)$. ومن جهة ثانية $\operatorname{Im}(u) \subset F$ إذن $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ و من ثَمّ $\operatorname{rg}(v \circ u) \le \operatorname{rg}(v)$.
2. إذا كان u غامراً كان $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.
3. و إذا كان v متبايناً كان $\operatorname{rg}(v \circ u) = \dim v(\operatorname{Im}(u)) = \dim \operatorname{Im}(u) = \operatorname{rg} u$. □

II.3-6. ملاحظة عملية:

لتعيين رتبة جملة أشعة $(a_1,\dots,a_p)$ من فضاء شعاعي E بُعده منتهٍ n، نكتب أولاً كلّ شعاع منها كعبارة خطيّة بعناصر أساس $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ لـ E. ثُمّ نلاحظ أنّ الفضاء $\mathrm{vect}(a_1,\dots,a_p)$ لا يتغيّر إذا ضُرِبَ أحد الأشعة a_i بثابت مختلف عن 0 أو إذا أُضيف إلى أحد الأشعة a_i تركيب خطي في بقية الأشعة $a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_p$. لذلك نسعى للحصول على جملة $(b_1,\dots,b_p)$ من أشعة $\mathrm{vect}(a_1,\dots,a_p)$ تولّد الفضاء نفسه و بحيث تكون مركّباتها على الأساس $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ حاوية العديد من الأصفار. في الحقيقة نسعى لأن يكون تمثيل الأشعة $b_1,\dots,b_p$ على الأساس $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ من النمط التالي:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_p \\ \hline
e_1 & \times & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
e_2 & \times & \times & 0 & & \vdots \\
\vdots & \times & \ddots & \times & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\
 & \times & & & & \times \\
 & \vdots & & & & \vdots \\
e_n & \times & \times & \cdots & \cdots & \times
\end{array}$$

سنوضّح هذا الأسلوب في المثال التالي، حيث نحسب رتبة (a_1,a_2,a_3,a_4) من IR^5 والتي مركّباتها على الأساس القانونيّ معطاة كما يلي :

$$a_1=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\5\\9\end{bmatrix} \text{ و } a_2=\begin{bmatrix}5\\1\\1\\2\\7\end{bmatrix} \text{ و } a_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\5\\1\end{bmatrix} \text{ و } a_4=\begin{bmatrix}-2\\7\\0\\13\\12\end{bmatrix}.$$

نبيّن فيما يلي العمليات التي يمكن إجراؤها على هذه الأشعّة للحصول على الشكل السابق:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_3 & a_1+2a_3 & a_2+5a_3 & a_4-2a_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix}2&5&-1&-2\\3&1&2&7\\-1&1&3&0\\5&2&5&13\\9&7&1&12\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1&0&0&0\\2&7&11&3\\3&5&16&-6\\5&15&27&3\\1&11&12&10\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_3, & a_2 - a_1 - a_4 + 5a_3, & a_1 + 2a_3, & a_4 - 2a_3 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 17 & 5 & -6 \\ 5 & 9 & 15 & 3 \\ 1 & -9 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_3, & a_2 - a_1 - a_4 + 5a_3 = b_2, & a_1 + 2a_3 - 7b_2, & a_4 - 2a_3 - 3b_2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -114 & -57 \\ 5 & 9 & -48 & -24 \\ 1 & -9 & 74 & 37 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -57 & 0 \\ 5 & 9 & -24 & 0 \\ 1 & -9 & 37 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث

$$\begin{aligned} b_1 &= a_3 \\ b_2 &= -a_1 + a_2 + 5a_3 - a_4 \\ b_3 &= 3a_1 - 3a_2 - 17a_3 + 4a_4 \\ b_4 &= 2a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \end{aligned}$$

نستنتج أنّ $rg(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$ وأنه توجد علاقة ارتباط خطّي بين الأشـــعة a_1، a_2، a_3 و a_4 هي $b_4 = 2a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0$.

تمرينات

التمرين 1. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، بُعده n. وليكن f تطبيقاً خطياً من E إلى E، و x عنصراً من $E\setminus\{0\}$. نفترض أن الجملة $\left(f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)\right)$ أساس لـ E. أثبت أن f تقابلٌ، وأنه يوجد من $\mathbb{K}^n$ بحيث

$f^n + a_n f^{n-1} + \dots + a_1 I_E = 0$.

التمرين 2. ليكن E و F فضاءَين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$. وليكن V فضاءً شعاعياً جزئيـاً من E وكذلك ليكن W فضاءً شعاعياً جزئياً من F. نعرّف $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ بأنها المجموعة:

$\mathcal{L}_{V,W}(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F) : V \subset \ker u, \operatorname{Im} u \subset W\}$.

أثبت أن $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{L}(E,F)$ يُشاكِل تقابليـاً الفضاء $\mathcal{L}(E/V, W)$. ماذا يمكن أن نقول عن بُعد $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ إذا كان كل من $\dim V$ و $\operatorname{codim} W$ منتهياً؟

التمرين 3. ليكن $E = \mathbb{R}^4$. ولتكن الأشـعة $a = (1,2,3,4)$، $b = (1,1,1,3)$، $c = (2,1,1,1)$، $d = (-1,0,-1,2)$، $e = (2,3,0,1)$ من E. وليكن الفضاءين الجزئيين:

$U = \operatorname{vect}(a,b,c)$، و $V = \operatorname{vect}(d,e)$

احسب أبعاد كلٍ من U و V و $U \cap V$ و $U+V$.

التمرين 4. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من E. نفترض أن بُعد $E_1 + E_2$ منتهٍ. أثبت أنّ

$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.

ثُم أثبت أنّ الشرط $\dim E_1 + \dim E_2 > \dim E$ يقتضي أنّ $E_1 \cap E_2 \neq \{0\}$.

التّمرين 5. لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعية منتهية الأبعاد على حقل $\mathbb{K}$.

1. ليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$ و $g \in \mathcal{L}(F,G)$. أثبت أن

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim F \leq \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)).$$

2. ليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$ و $g \in \mathcal{L}(E,F)$. أثبت أن

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(g+f) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

التّمرين 6. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، بُعده n. وليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من E يحققان $\dim E_1 = \dim E_2 = n - p$. أثبت أنه يوجد فضاء شعاعي جزئي F يحقق $E = F \oplus E_1 = F \oplus E_2$.

التّمرين 7. لتكن $n \in \mathbb{N}^*$، وليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن n. وليكن $u \in \mathcal{L}(E)$ معرّفاً بـــ

$$u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. تحقّق أنّ u خطّي وعيّن $\ker u$ و $\mathrm{Im}\, u$ و $\mathrm{rg}\, u$.
2. ليكن $Q \in \mathrm{Im}\, u$ أثبت أنه يوجد كثير حدود وحيد $P \in E$ بحيـــث $u(P) = Q$ وبحيث $P(0) = P'(0) = 0$.

التّمرين 8. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. نفترض أن $n = \dim E$. وليكـــن $u \in \mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ

$$\ker u = \mathrm{Im}\, u \Leftrightarrow (u^2 = 0) \wedge (n = 2\,\mathrm{rg}\, u)$$

التّمرين 9. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن u و v عنصرين من $\mathcal{L}(E)$. نفترض أنّ $E = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v = \ker u + \ker v$ أثبت أنّ

$$E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Im}\, v = \ker u \oplus \ker v$$

التّمرين 10. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن العنصران u و v من $\mathcal{L}(E)$. نفترض أنّ $u \circ u - u \circ v + 2u - I_E = 0$ أثبت أنّ $u \circ v = v \circ u$.

التمرين 11. ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أن $n = \dim E$. ليكن u و $\mathcal{L}(E,F)$. أثبت أن

1. أياً كان الفضاء الشعاعي الجزئي G من E لدينا

$$\dim u(G) = \dim G - \dim(G \cap \ker u) .$$

2. أياً كان الفضاء الشعاعي الجزئي H من F لدينا

$$\dim u^{-1}(H) = n + \dim(H \cap u(E)) - \operatorname{rg} u .$$

التمرين 12. ليكن (a,b) و $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. ولنتأمّل المجموعة

$$S = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall n \geq 0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}$$

1. أثبت أنّ S فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ بُعده يساوي 2 .
2. نفترض أنّ المعادلة $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ تقبل جذرين مختلفين λ_1 و λ_2 . أثبت أنّ الجملة $\left((\lambda_1^n)_{n\geq 0}, (\lambda_2^n)_{n\geq 0}\right)$ تكوِّن أساساً للفضاء S .
3. نفترض أنّ المعادلة $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ تقبل جذراً مضاعفاً λ . أثبت أنّه في هذه الحالة تكوِّن الجملة $\left((n\lambda^n)_{n\geq 0}, (\lambda^n)_{n\geq 0}\right)$ أساساً للفضاء S .
4. لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية Fibonacci المعرّفة تدريجياً كما يلي :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 \text{ و } \forall n \geq 0,\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n .$$

احسب x_n بدلالة n .

ꕤꕤꕤꕤ

الفصل الثالث

الثنويّة في الفضاءات الشعاعيّة

III.1. ثنوي فضاء شعاعي

III.1-1. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$، نفترضه مختلفاً عن $\{0\}$. نسمّي كلَّ تطبيق خطي من E إلى $\mathbb{K}$ شكلاً خطياً على E. ونرمز بالرمز E^* إلى الفضاء الشعاعي $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ أي فضاء الأشكال الخطية على E. ونسمّي E^* الفضاء الشعاعي الثنويّ لـ E. وأخيراً أياً كان $f \in E^*$ و $x \in E$ نرمز بـ $\langle f,x\rangle$ إلى المقدار $f(x)$.

III.1-2. تعريف:

∘∘ أياً كان $x \in E$ نعرِّف

$$x^\perp = \left\{ y \in E^* : \langle y,x\rangle = 0 \right\}$$

إنّ $x^\perp$ فضاء شعاعي جزئي من E^* نسمّيه الفضاء العمودي على x في E^*.

∘∘ وبوجه عام أياً كانت المجموعة الجزئيّة غير الخالية A من E نعرّف:

$$A^\perp = \left\{ y \in E^* : \forall a \in A, \langle y,a\rangle = 0 \right\} = \bigcap_{a\in A} a^\perp .$$

إنّ $A^\perp$ فضاء شعاعي جزئي من E^* ندعوه الفضاء العمودي على A في E^*.

∘∘ بأسلوب مماثل نعرِّف، أياً كان $y \in E^*$،

$$y^\circ = \left\{ x \in E : \langle y,x\rangle = 0 \right\} = \ker y .$$

نسمّي y° الفضاء الشعاعيّ الجزئي العمودي على y في E.

∘∘ وكذلك نعرّف، أياً كانت المجموعة الجزئيّة غير الخالية B من E^*،

$$B^\circ = \left\{ x \in E : \forall y \in B, \langle y,x\rangle = 0 \right\} = \bigcap_{y\in B} \ker y .$$

ونسمّي B° الفضاء الشعاعيّ الجزئي العمودي على B في E.

∘∘ وأخيراً إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من E و B مجموعة جزئية غير خالية من E^* فإننا نقول إنّ A و B متعامدتان إذا وفقط إذا كان $B \subset A^\perp$ وهذا يكافئ كوْن $A \subset B^\circ$ أو $\forall a \in A, \forall b \in B, \langle a,b\rangle = 0$.

III.1-3. ملاحظات:

- من الواضح أنّ $E^{\perp} = \{0\}$.
- وكذلك يكون $(E^{*})^{\circ} = \{0\}$ إلا أنّ إثبات هذه الخاصّة في الحالة العامّة الموافقة لـ $\dim E = +\infty$ يتطلب موضوعة الاختيار، وسنرى لاحقاً إثباتاً لهذه الخاصة في حالة $\dim E < +\infty$.

III.1-4. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ

1. أياً كان الجزءان غير الخاليين A و B من E، كان: $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
2. أياً كان الجزء غير الخالي A من E، كان $A^{\perp} = (\mathrm{vect}(A))^{\perp}$ و $A \subset (A^{\perp})^{\circ}$.
3. أياً كان الجزءان غير الخاليين A و B من E^{*}، كان $A \subset B \Rightarrow B^{\circ} \subset A^{\circ}$.
4. أياً كان الجزء غير الخالي A من E^{*}، كان $A^{\circ} = (\mathrm{vect}(A))^{\circ}$ و $A \subset (A^{\circ})^{\perp}$.

الإثبات

إثبات هذه الخواص بسيط ومتروك للقارئ. □

III.1-5. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. وليكن H فضاءً شعاعياً جزئياً من E. هناك تكافؤ بين الخواص التالية:

°1. تمام بعد H يساوي 1 أي $\mathrm{codim}_E H = 1$.

°2. H هو نواة شكل خطي غير معدوم.

°3. يوجد مستقيم شعاعي D (أي فضاء جزئي بعده 1) بحيث $H \oplus D = E$.

الإثبات

$1^{\circ} \Leftarrow 2^{\circ}$. لمّا كان $\dim E/H = \dim \mathbb{K} = 1$، يوجد تشاكل خطي تقابلي

$$\theta : E/H \to \mathbb{K}.$$

ليكن $Q : E \to E/H$ الغمر القانوني عندئذ يكون $f = \theta \circ Q$ شكلاً خطياً يحقق $H = \ker f$، وبالطبع $f \neq 0$ لأنّ $E \neq H$.

$2^{\circ} \Leftarrow 3^{\circ}$. لنفترض أنّ $H = \ker f$ حيث f شكل خطّي من $E^{*}\backslash\{0\}$. إنّ f غامرٌ لأنه غير معدوم، إذن يوجد b في E بحيث $\langle f, b \rangle = 1$. لنضع $D = \mathbb{K}.b$.

إذا كان $x \in D \cap H$ كان $x = \lambda.b$ حيث $\lambda \in \mathbb{K}$ وكان $\langle f,x \rangle = 0$، ومن ثَمّ يكون $0 = \lambda\langle f,b \rangle = \lambda$. ينتج من ذلك أنّ $x = 0$ ومنه $D \cap H = \{0\}$.

من جهة أخرى، أياً كان $x \in E$ لدينا

$$x = \underbrace{\langle f,x \rangle \cdot b}_{\in D} + \underbrace{x - \langle f,x \rangle \cdot b}_{\in H}$$

إذن $E = H \oplus D$.

$3° \Leftarrow 1°$. ليكن P الإسقاط على D توازياً مع H إنّ $H = \ker P$ و $D = \operatorname{Im} P$ ومن ثَمّ يكون هناك تقابلٌ خطيّ بين $E/H = E/\ker P$ و $\operatorname{Im} P$ وذلك استناداً إلى المبرهنة I.5-2.

إذن $\operatorname{codim}_E H = \dim E/H = \dim D = 1$. □

III.1-6. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. نسمّي **مستقيماً** في E كل فضاء شعاعي جزئي D بعده 1 في E. ونسمّي **مستوياً** في E كل فضاء شعاعي جزئي P بعده 2 في E. وأخيراً نُسمّي **مستوياً فوقياً** في E كل فضاءٍ شعاعيٍّ جزئيٍّ H تمام بعده 1 في E.

III.1-7. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. وليكن H مستوياً فوقياً في E. عندئذ يكون $H^\perp$ مستقيماً شعاعياً في E^*.

الإثبات

لنفترض أنّ $H = \ker y$ حيث $y \in E^* \setminus \{0\}$. لأنّ الشكل الخطيّ y غامر، يوجد $a \in E$ بحيث $\langle y,a \rangle = 1$.

من جهة أولى، من الواضح أنّ $y \in H^\perp$ ومن ثَمّ $\mathbb{K} \cdot y \subset H^\perp$.

ومن جهة ثانية، ليكن $z \in H^\perp$، عندئذ لمّا كان

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{\langle y,x \rangle a}_{\in \mathbb{K} \cdot a} + \underbrace{x - \langle y,x \rangle a}_{\in H}$$

كان $\forall x \in E,\ \langle z,x \rangle = \langle y,x \rangle z(a)$، أو $z = \langle z,a \rangle \cdot y$. إذن $z \in \mathbb{K} \cdot y$، وهذا ما يثبتُ صحّةَ المساواة $H^\perp = \mathbb{K} \cdot y$. □

III.1-8. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. وليكن y شكلاً خطيّاً من $E^*\setminus\{0\}$ وليكن $H = \ker y$. عندئذ نسمّي المعادلة $\langle y, x\rangle = 0$ معادلة المستوي الفوقيّ H. ذلك لأنّ $\langle y, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x \in H$.

III.2. منقول تطبيق خطّي

III.2-1. تعريف: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$، وليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى F أي $u \in \mathcal{L}(E,F)$. نعرّف التطبيق الخطيّ ${}^t u$ في $\mathcal{L}(F^*,E^*)$ كما يلي:

$$ {}^t u : F^* \to E^*,\ y \mapsto {}^t u(y) = y \circ u $$

ونسمّي ${}^t u$ منقول التطبيق u. لاحظ أنّ:

$$ \forall x \in E, \quad \forall y \in F^*, \quad \left\langle {}^t u(y), x \right\rangle_{E^*,E} = \langle y, u(x)\rangle_{F^*,F}. $$

III.2-2. مبرهنة: ليكن E و F فضائين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$.

1. إن التطبيق $\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F^*,E^*), u \mapsto {}^t u$، خطّيٌّ ومتباين.
2. أياً كان u في $\mathcal{L}(E,F)$ و v في $\mathcal{L}(F,G)$، كان ${}^t(v\circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.
3. ليكن I_E (على التوالي I_{E^*}) التطبيق المطابق على E (على E^*)، إذن ${}^t I_E = I_{E^*}$.
4. إذا كان u في $\mathcal{L}(E,F)$ تقابلاً كان ${}^t u$ تقابلاً أيضاً و كان $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.
5. إذا كان u في $\mathcal{L}(E,F)$ كان $\ker({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$. ومن ثَم إذا كان u غامراً كان ${}^t u$ متبايناً.

الإثبات

1. ليكن u و v من $\mathcal{L}(E,F)$ وليكن λ في $\mathbb{K}$. عندئذ، أياً كان (x,y) في $E\times F^*$، يكُن

$$
\begin{aligned}
\langle \Phi(u+\lambda v)(y), x\rangle_{E^*,E} &= \left\langle {}^t(u+\lambda v)(y), x\right\rangle_{E^*,E} = \langle y, (u+\lambda v)(x)\rangle_{F^*,F} \\
&= \langle y, u(x) + \lambda v(x)\rangle_{F^*,F} = \langle y, u(x)\rangle_{F^*,F} + \lambda \langle y, v(x)\rangle_{F^*,F} \\
&= \left\langle {}^t u(y), x\right\rangle_{E^*,E} + \lambda \left\langle {}^t v(y), x\right\rangle_{E^*,E} \\
&= \left\langle {}^t u(y) + \lambda {}^t v(y), x\right\rangle_{E^*,E} \\
&= \left\langle ({}^t u + \lambda {}^t v)(y), x\right\rangle_{E^*,E} = \langle (\Phi(u) + \lambda \Phi(v))(y), x\rangle_{E^*,E}
\end{aligned}
$$

فالتطبيق Φ خطيّ.

ومن جهة أخرى، التطبيق Φ متباين لأنّ

$$\begin{aligned} u \in \ker \Phi &\Rightarrow \forall (x,y) \in E \times F^*, \quad \langle y, u(x) \rangle_{F^*,F} = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in E, \quad u(x) \in (F^*)^\circ = \{0\} \\ &\Rightarrow \forall x \in E, \quad u(x) = 0 \\ &\Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

وهذا ما يثبت الخاصّة 1.

2. ليكن $u \in \mathcal{L}(E,F)$ و $v \in \mathcal{L}(F,G)$. عندئذ، أياً كان (x,y) من $E \times G^*$ ، يكُن

$$\begin{aligned} \left\langle {}^t(v \circ u)(y), x \right\rangle_{E^*,E} &= \langle y, v \circ u(x) \rangle_{G^*,G} = \langle y, v(u(x)) \rangle_{G^*,G} \\ &= \left\langle {}^t v(y), u(x) \right\rangle_{F^*,F} \\ &= \left\langle {}^t u({}^t v(y)), x \right\rangle_{E^*,E} = \left\langle {}^t u \circ {}^t v(y), x \right\rangle_{E^*,E} \end{aligned}$$

ومن ثَمّ ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

3. واضح من التعريف.

4. تنتج هذه الخاصة من أخذ المنقول في طرفي المساواتين:

$$u^{-1} \circ u = I_E \quad \text{و} \quad u \circ u^{-1} = I_F$$

فنجد باستخدام ما سبق أنّ

$${}^t u \circ {}^t(u^{-1}) = {}^t I_E = I_{E^*} \quad \text{و} \quad {}^t(u^{-1}) \circ {}^t u = {}^t I_F = I_{F^*}.$$

فالتطبيق ${}^t u$ تقابلٌ و $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.

5. تنجم هذه الخاصّة من التكافؤات التالية:

$$\begin{aligned} f \in \ker({}^t u) &\Leftrightarrow f \circ u = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \langle f, u(x) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \operatorname{Im} u, \langle f, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f \in (\operatorname{Im} u)^\perp \end{aligned}$$

ومن ثَم إذا كان u غامراً كان ${}^t u$ متبايناً. □

III.3. الثّنوية في الفضاءات الشعاعيّة المنتهية البُعد

ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، ومنتهي البُعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. عندئذ يكون الفضاء الثنوي E^* منتهي البعد و يكون $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E$.

III.3-1. تعريف : ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، ومنتهي البُعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً لـ E. لنعرّف الجملة $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ من E^* بالعلاقات:

$$e_j^*(e_i) = \langle e_j^*, e_i \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : & i = j \\ 0 & : & i \neq j \end{cases}$$

عندئذ تكوّن الجملة $\mathcal{E}^*$ أساساً لـ E^* نسمّيه الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$. وتتحقّق العلاقات التالية:

$$\forall f \in E^*, \quad f = \sum_{i=1}^{n} \langle f, e_i \rangle \cdot e_i^*$$

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i^*, x \rangle \cdot e_i$$

والتي تُبرّر تسمية الأساس $\mathcal{E}^*$ بالأساس الثنويّ.

III.3-2. مبرهنة : ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، ومنتهي البُعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن x عنصراً من $E \setminus \{0\}$. عندئذ يوجد شكل خطيّ f في E^* بحيث يكون $f(x) = 1$.

الإثبات

لنضع $e_1 = x$، ولنتمّم (e_1) إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ لـ E. ثُم لنأخذ الأســـاس الثنوي $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ لهذا الأساس. عندئذ يحقّق $f = e_1^*$ المطلوب. ينتج من هذه المبرهنة أنّ $(E^*)^\circ = \{0\}$. □

III.3-2. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً،مختلفاً عن $\{0\}$، ومنتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ يكون التّطبيق: $\Psi : E \to E^{**} : x \mapsto \Psi(x)$ المعرّف بالعلاقـــة $\langle \Psi(x), f \rangle = \langle f, x \rangle$ حين يكون (x, f) في $E \times E^*$، تقابلاً خطّياً.

الإثبات

لمّا كان $\dim E^{**} = \dim E$ يكفي أن نثبتَ أنّ التطبيق Ψ خطّي ومتباين. النقطة الأولى واضحة، والثانية تنتج من المساواة $\ker \Psi = (E^*)^\circ = \{0\}$. وبذلك يتم المطلوب. □

III.3-3. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً،مختلفاً عن $\{0\}$، رمنتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_n)$ أساساً لـ E^*. عندئذ يوجد أساس $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ لـ E بحيث يكون $\mathcal{F}$ أساسَه الثّنوي.

الإثبات

ليكن $\mathcal{F}^* = (f_1^*,\ldots,f_n^*)$ الأساس الثنوي لـ $\mathcal{F}$ في E^{**}. ولنضع $e_j = \Psi^{-1}(f_j^*)$ أياً كان $j \in \mathbb{N}_n$، حيث Ψ هو التقابل الخطّي القانوني بين E و E^{**} الوارد في المبرهنة السابقة، فيكون:

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2,\quad \langle f_i, e_j\rangle_{E^*,E} = \langle \Psi(e_j), f_i\rangle_{E^{**},E^*} = \langle f_j^*, f_i\rangle_{E^{**},E^*} = \delta_{ij}$$

إذن $\mathcal{F}$ هو الأساس الثنوي لـ $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$.

III.3-4. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً،مختلفاً عن $\{0\}$، ومنتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$.

1. أياً كان الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ F من E لدينا:

$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ و $F = (F^\perp)^\circ$.

2. أياً كان الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ G من E^* لدينا:

$\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ و $G = (G^\circ)^\perp$.

الإثبات

1. ليكن $(e_1,\ldots,e_p)$ أساساً لـ F، ولنتمّمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ لـ E، وليكن $\mathcal{E}^* = (e_1^*,\ldots,e_n^*)$ الأساس الثنوي لـ $\mathcal{E}$. عندئذ، أياً كان $f \in E^*$، فإنّ

$$\begin{aligned} f \in F^\perp &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_p,\quad \langle f, e_i\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f = \sum_{i=p+1}^{n} \langle f, e_i\rangle \cdot e_i^* \\ &\Leftrightarrow f \in \mathrm{vect}(e_{p+1}^*,\ldots e_n^*) \end{aligned}$$

إذن $F^\perp = \mathrm{vect}(e_{p+1}^*,\ldots,e_n^*)$ و $\dim F^\perp = n - \dim F$.

2. ليكن $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_n)$ أساساً لـ E^* حُصل عليه بإتمام الأساس $(f_1,\dots,f_p)$ للفضاء الجزئي G إلى أساس لـ E^*. وليكن $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ الأساس في E الذي أساسه الثنوي هو $\mathcal{F}$. عندئذ أياً كان x في E فلدينا

$$\begin{aligned} x\in G^\circ &\Leftrightarrow \forall i\in \mathbb{N}_p,\quad \langle f_i,x\rangle=0\\ &\Leftrightarrow x=\sum_{i=p+1}^{n}\langle f_i,x\rangle\cdot e_i\\ &\Leftrightarrow x\in \operatorname{vect}(e_{p+1},\dots,e_n)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ يكون $G^\circ=\operatorname{vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$ و $\dim G^\circ=n-\dim G$.

من ناحية أخرى، من الواضح أن $F\subset (F^\perp)^\circ$، ولكن

$$\dim(F^\perp)^\circ=n-\dim F^\perp=n-(n-\dim F)=\dim F$$

ومنه المساواة $F=(F^\perp)^\circ$، ونترك للقارئ أن يثبت بأسلوب مماثل أنّ $G=(G^\circ)^\perp$. □

III.3-5. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين، غير تافهين، ومنتهيي البعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u في $\mathcal{L}(E,F)$، عندئذ يكون $\operatorname{rg}(u)=\operatorname{rg}({}^t u)$.

الإثبات

في الحقيقة، لقد وجدنا أنّ $\ker {}^t u=(\operatorname{Im} u)^\perp$، إذن:

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}({}^t u) &= \dim F^*-\dim\ker{}^t u=\dim F^*-\dim(\operatorname{Im} u)^\perp\\ &= \dim F^*-(\dim F^*-\dim \operatorname{Im} u)=\dim\operatorname{Im} u=\operatorname{rg}(u)\end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب إثباته. □

III.3-6. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_1,\dots,f_r)$ جملة من الأشكال الخطيّة على E. عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين:

1. $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\in\mathbb{K}^r,\quad f=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k f_k$.
2. $\forall x\in\bigcap_{i=1}^{r}\ker f_i,\quad f(x)=0$.

الإثبات

في الحقيقة، لدينا

$$\left(\bigcap_{i=1}^{r}\ker f_i\right)^\perp=\left(\{f_1,\dots,f_r\}^\circ\right)^\perp=\left((\operatorname{vect}(f_1,\dots,f_r))^\circ\right)^\perp=\operatorname{vect}(f_1,\dots,f_r)$$ □

تمرينات

التّمرين 1. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن u و $\mathcal{L}(E,F)$ تطبيقاً خطّيّاً غامراً. أثبت أنّ ^tu متباين.

التّمرين 2. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين منتهيي البعد على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن u و $\mathcal{L}(E,F)$ أثبت أنّ:

$$\ker {}^tu = (\operatorname{Im} u)^{\perp} \quad , \quad \operatorname{Im} {}^tu = (\ker u)^{\perp}$$

التّمرين 3. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منتهي البعد على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن V_1 و V_2 فضاءين شعاعيّين جزئيّين من E، وليكن W_1 و W_2 فضاءين شعاعيّين جزئيّين من E^*. قارن بين $(V_1+V_2)^{\perp}$ و $V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$، وبين $(V_1 \cap V_2)^{\perp}$ و $V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$، وبين $(W_1+W_2)^{\circ}$ و $W_1^{\circ} \cap W_2^{\circ}$، وبين $(W_1 \cap W_2)^{\circ}$ و $W_1^{\circ}+W_2^{\circ}$.

التّمرين 4. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن (f,g) و $(E^*)^2$. نفترض أنّه أيّاً كان x من E لدينا $f(x)g(x)=0$. أثبت أنّ $f=0$ أو $g=0$.

التّمرين 5. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، أثبت صحّة القضيتين التّاليتين:

$(\mathscr{P}_k)$ لتكن $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ جملة حرّة من عناصر E^*. يوجد جملة $(x_1,\ldots,x_k)$ من عناصر E بحيث يكون $\ell_i(x_j)=\delta_{ij}$ أيّاً كان (i,j) و $\mathbb{N}_k^2$.

$(\mathscr{Q}_k)$ لتكن $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ جملة حرّة من عناصر E^*. وليكن ℓ من E^* بحيث $\bigcap_{i=1}^{k}\ker(\ell_i) \subset \ker(\ell)$. يوجد $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ من $\mathbb{K}$ بحيث $\ell=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\ell_i$.

واستنتج أنّه أيّاً كانت الجملة $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ من عناصر E^*، هناك تكافؤ بين القضيتين:

$$\bigcap_{i=1}^{k}\ker(\ell_i) \subset \ker(\ell) \quad \text{و} \quad \ell \in \operatorname{vect}(\ell_1,\ldots,\ell_k).$$

التّمرين 6. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منتهي البعد على الحقل $\mathbb{K}$، ولتكن $(\ell_1,\dots,\ell_k)$ جملة حرّة من عناصر E^*. أثبت أنّ:

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k}\ker(\ell_i)\right) = \dim E - k .$$

التّمرين 7. ليكن $E = \mathbb{R}_2[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة والتي لا تزيد درجتها عن 2، ولتكن φ_1 و φ_2 و φ_3 العناصر من E^* المعرّفة بـ :

$$\varphi_1(P) = P(1), \qquad \varphi_2(P) = P'(1), \qquad \varphi_3(P) = \int_0^1 P(t)dt$$

أثبت أنّ $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ أساس للفضاء E^* وحدّد أساساً لـ E يكون $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ أساسه الثنوي.

التّمرين 8. ليكن $E = \mathbb{R}_3[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة والتي لا تزيد درجتها عن 3، ولتكن φ_1 و φ_2 و φ_3 و φ_4 العناصر من E^* المعرّفة بـ :

$$\varphi_1(P) = P(0),\ \varphi_2(P) = P(1),\ \varphi_3(P) = P'(0),\ \varphi_4(P) = P'(1) .$$

1. أثبت أنّ $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ أساس لـ E^* وحدّد أساساً لـ E يكون الأساس $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ أساسه الثنوي.
2. عبّر عن الشّكل الخطّيّ $\psi \in E^*$ المعرّف بـ $\psi(P) = \int_0^1 P(t)\,dt$ بدلالة عناصر الأساس السّابق.

التّمرين 9. ليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة والتي لا تزيد درجتها عن n. في حالة كلّ عدد حقيقيّ a نضع: $\varphi_a : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P(a)$.

1. تحقّق أنّه أياً كان العدد الحقيقيّ a، $\varphi_a \in E^*$.
2. لتكن $x_0, x_1,\dots,x_n$ أعداداً حقيقيّةً مختلفةً مثنى مثنى. أثبت أنّ $(\varphi_{x_0},\varphi_{x_1},\dots,\varphi_{x_n})$ أساس للفضاء E^* وحدّد أساسه الثّنويّ.
3. أثبت أنّه توجد متتالية منتهية وحيدة $(\lambda_i)_{0\le i\le n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ تحقّق:

$$\forall P \in E,\quad \int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i P(x_i)$$

التّمرين 10. ليكن $E = \mathrm{IR}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة والتي لا تزيد درجتها عن n.

1. ليكن $e_k(X) = (X+a)^k$، أوجد الأساس الثّنويّ $(e_k^*)_{0\le k\le n}$ للأساس $(e_k)_{0\le k\le n}$ من E. عبّر عن الشّكل الخطّيّ $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ بدلالة عناصر هذا الأساس.
2. ليكن الشّكل الخطّيّ Δ المعرّف بـ $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$، و ليكن الشّكل الخطّيّ φ_k المعرّف بالعلاقة $\varphi_k(P) = \Delta^k(P)(0)$. أثبت أنّ $(\varphi_k)_{0\le k\le n}$ أساس للفضاء E^* وأوجد الأساس $(e_k)_{0\le k\le n}$ في E الذي أساسه الثّنويّ $(\varphi_k)_{0\le k\le n}$.

التّمرين 11. لتكن $\mathscr{E}$ مجموعة المصفوفات[*] $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ التي تحقّق:

$$\exists s \in \mathrm{IR},\ \forall i \in \mathrm{IN}_n,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s,\quad \forall j \in \mathrm{IN}_n,\quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = s$$

نرمز بـ $\delta(M)$ إلى s.

1. أثبت أنّ $\mathscr{E}$ فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ وأنّ δ شكل خطّيّ على $\mathscr{E}$.
2. أثبت أنّ جداء عنصرين من $\mathscr{E}$ هو عنصر من $\mathscr{E}$.
3. لتكن المصفوفة $J = (a_{ij})$ التي تحقّق $\forall (i,j) \in \mathrm{IN}_n^2,\ a_{ij} = 1$. أثبت أنّ:

$$\left(A \in \mathscr{E}\right) \Leftrightarrow \left(\exists s : AJ = JA = sJ\right)$$

4. أثبت أنّه إذا كانت المصفوفة A من $\mathscr{E}$ قَلوبةً فإنّ $A^{-1} \in \mathscr{E}$.
5. أثبت أنّ $\mathscr{E} = \ker\delta \oplus \mathrm{IR}\cdot J$ وأوجد $\dim \mathscr{E}$.
6. ليكن $\overline{\mathscr{E}}$ مجموعة المصفوفات $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ التي تحقّق:

$$\exists s \in \mathrm{IR},\quad \forall i \in \mathrm{IN}_n,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s,\quad \forall j \in \mathrm{IN}_n,\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = s,$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n+1-k} = s$$

أثبت أنّ $\overline{\mathscr{E}}$ فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ وأوجد بعده.

---

[*] يفترض هذا التمرين دراية القارئ بمفاهيم الفصل الرابع.

التمرين 12. لتكن متتالية كثيرات الحدود $(P_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يلي:

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad \forall n \geq 2, \quad P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-n)^{n-1}$$

1. تحقّق أنّه أياً كان $1 \leq n$ لدينا $P'_n(X) = P_{n-1}(X-1)$. واستنتج أنّ :
$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \quad P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k)$.

2. لتكن $k \in \mathbb{N}$، نعرّف على $\mathbb{R}[X]$ الشّكل الخطّيّ φ_k بالعلاقة: $\varphi_k(P) = P^{(k)}(k)$.
أوجد $\varphi_k(P_n)$.

3. نفترض الآن أنّ m عدد طبيعيّ موجب تماماً ونرمز بـ $E = \mathbb{R}_m[X]$ لفضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها عن m. أثبت أنّ $P_0, P_1, \ldots, P_m$ أساس لـ E. أوجد أساسه الثّنويّ.

4. أثبت أنّ $\forall Q \in E, \quad Q(X) = \sum_{k=0}^{m} Q^{(k)}(k) P_k(X)$.

5. استنتج أنّ $\forall a \in \mathbb{R}, \quad P_m(X+a) = \sum_{k=0}^{m} P_{m-k}(a) P_k(X)$.

ꕤ

الفصل الرابع

المصفوفات

IV.1. مفهوم المصفوفة

لنذكّر بالرمز $\mathbb{N}_n$ الذي يرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعيّة الواقعة بـين 1 و n و $n \in \mathbb{N}$.

وسنرمز في بقيّة هذه الفقرة بالرمز A إلى حلقة تبديليّة ما.

IV.1-1. تعريف: نسمّي مصفوفةً من عناصر الحلقة A بـ n سطراً و p عموداً، كلّ تطبيـق منطلقه المجموعة $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$ يأخذ قيمه في A. ونرمز بالرمز $\mathcal{M}_{n\times p}(A)$ إلى مجموعة المصفوفات بـ n سطراً و p عموداً من عناصر الحلقة A.

ولقد جرت العادة أن نمثّل مصفوفة M من $\mathcal{M}_{n\times p}(A)$ بالشكل:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = (a_{i\,j})_{(i,j)\in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$$

IV.1-2. تعريف:

- نسمّي مصفوفة جزئية من مصفوفة $M \in \mathcal{M}_{n\times p}(A)$ مقصور M على مجموعة جزئيّة من النمط $I \times J \subset \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$ ونرمز إلى هذه المصفوفة الجزئيّة بالرمز $M_{I,J}$.
- نسمّي مصفوفةَ سطرٍ (أو مصفوفة عمودٍ) كل عنصر من $\mathcal{M}_{1\times p}(A)$ (أو $\mathcal{M}_{n\times 1}(A)$).
- نسمّي مصفوفة مربّعة من المرتبة n كل عنصر من $\mathcal{M}_{n\times n}(A)$، ونرمـز إلى مجموعـة المصفوفات المربّعة من المرتبة n بالرمز $\mathcal{M}_n(A)$.
- نسمّي مصفوفة مثلثيّة عليا كل مصفوفة مربّعة $M = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(A)$، تحقّق

$$i > j \Rightarrow a_{i\,j} = 0.$$

- نسمّي مصفوفة مثلثيّة سفلى كل مصفوفة مربّعة $M = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(A)$، تحقّق

$$i < j \Rightarrow a_{i\,j} = 0$$

- وأخيراً نسمّي مصفوفة قطريّة كل مصفوفة مربعة $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(A)$ ، تحقّق $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

ونسمي المصفوفة $I_n = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(A)$ المعرّفة بـــ $a_{ij} = \delta_{ij}$ ، حيث δ_{ij} هو رمز Kronecker المصفوفة الواحديّة في $\mathcal{M}_n(A)$.

IV.2. العمليّات على المصفوفات

سنفترض في هذه الفقرة أيضاً أنّ A حلقة تبديليّة. لتكن $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ يمكننا تزويد $\mathcal{M}_{n\times p}(A)$ بقانوني تشكيل، أولهما داخليّ $(+)$ معرّف كما يلي:

أياً كانت $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(A)$ و $N = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(A)$ فإنّ

$$M + N = (a_{ij} + b_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$$

وثانيهما خارجي $(\cdot)$ ، مجموعة مؤثراته A ، ومعرّف كما يلي:

أياً كانت $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(A)$ و $\lambda \in A$ فإنّ

$$\lambda \cdot M = (\lambda a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$$

ونتحقّق بسهولة أنّ $(\mathcal{M}_{n\times p}(A), +)$ زمرة تبديليّة وأنّ

1. $1_A \cdot M = M$ ، $\forall M \in \mathcal{M}_{n\times p}(A)$,
2. $\lambda \cdot (M + N) = \lambda \cdot M + \lambda \cdot N$ ، $\forall \lambda \in A, \quad \forall (M, N) \in (\mathcal{M}_{n\times p}(A))^2$,
3. $(\lambda + \mu) \cdot M = \lambda \cdot M + \mu \cdot M$ ، $\forall (\lambda, \mu) \in A^2, \quad \forall M \in \mathcal{M}_{n\times p}(A)$,
4. $\lambda \cdot (\mu \cdot M) = (\lambda\mu) \cdot M$ ، $\forall (\lambda, \mu) \in A^2, \quad \forall M \in \mathcal{M}_{n\times p}(A)$,

فإذا كانت الحلقةُ A حقلاً $\mathbb{K}$ كانت البنية $(\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$.

ومن جهة أخرى، أياً كانت $(n, p, q) \in \mathbb{N}^{*3}$ ، نعرّف قانون ضرب المصفوفات كما يلي:

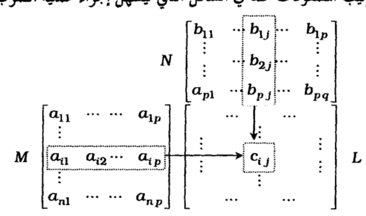
$$\times : \mathcal{M}_{n\times p}(A) \times \mathcal{M}_{p\times q}(A) \to \mathcal{M}_{n\times q}(A), \ (M, N) \mapsto L = M \times N$$

فإذا كان $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(A)$ و $N = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p\times q}(A)$ كانت $L = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times q}(A)$

حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_q, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

هذا وننصح، بترتيب المصفوفات كما في الشكل التالي ليسهل إجراء عملية الضرب هذه:



تبيّن المبرهنة التالية خاصّة هامّة من خواص ضرب المصفوفات:

IV.2-1. مبرهنة: لتكن (n, p, q, r) من $\mathbb{N}^{*4}$، ولتكن M من $\mathcal{M}_{n\times p}(A)$ و N من $\mathcal{M}_{p\times q}(A)$ و L من $\mathcal{M}_{q\times r}(A)$. عندئذ يكون $(M \times N) \times L = M \times (N \times L)$.

الإثبات

لنفترض أنّ $M = (a_{ij})$ و $N = (b_{ij})$ و $L = (c_{ij})$. عندئذ يكون

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_q, \quad [M \times N]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

وكذلك يكون

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [(M \times N) \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^{q} [M \times N]_{im} c_{mj}$$

ومن ثَم

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [(M \times N) \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^{q} (\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{km}) c_{mj}$$

و أخيراً

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [(M \times N) \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{km} c_{mj}$$

ومن جهة أخرى،

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_r, \quad [N \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^{q} b_{im} c_{mj}$$

إذن

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [M \times (N \times L)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} [N \times L]_{kj}$$

ومن ثَم

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [M \times (N \times L)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (\sum_{m=1}^{q} b_{km} c_{mj})$$

و أخيراً

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r, \quad [M \times (N \times L)]_{ij} = \sum_{m=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{km} c_{mj}$$

ومنه نستنتج أنّ $(M \times N) \times L = M \times (N \times L)$. □

IV.2-2. ملاحظات :

– إنّ قانون ضرب المصفوفات قانون تشكيل داخلي على مجموعة المصفوفات المربّعة من المرتبة n أي $\mathcal{M}_n(A)$. وتصبح بذلك البنية $(\mathcal{M}_n(A),+,\times)$ حلقةً، حيادي الضرب فيهـــا هـــو المصفوفة الواحديّة I_n . وتكون الحلقة $\mathcal{M}_n(A)$ غير تبديليّة أياً كانت $2 \leq n$ ، كما يبيِّن المثال التالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وتُصبح البنية $(\mathcal{M}_n(A),+,\cdot,\times)$ جبراً غير تبديلي على الحلقة A .

– نقول عن مصفوفة M من $\mathcal{M}_n(A)$ إنّها قَلوبة إذا وفقط إذا كانت عنصراً قلوباً في الحلقـــة $(\mathcal{M}_n(A),+,\times)$، ونرمز بالرمز $\mathcal{GL}_n(A)$ إلى زمرة العناصر القَلوبة في $(\mathcal{M}_n(A),+,\times)$.

– عند ضرب مصفوفتين M و N نكتب جداء الضرب عادة MN عوضاً عن $M \times N$.

سنفترض في بقيّة هذا الفصل أنّ الحلقة A حقل تبديليّ نرمز إليه بالرمز $\mathbb{K}$.

IV.2-3. مبرهنة: إنّ $(\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ فضاء شعاعي منتهي البعد على $\mathbb{K}$ ، بُعده يساوي np .

الإثبات

إنّ إثبات كون الفضاء $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ فضاءً شعاعياً على $\mathbb{K}$ ، أمر سهل ومتروك للقارئ.

لنعرّف، أياً كان (i,j) في $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$ ، المصفوفة $E_{ij} = \left(\lambda_{kq}^{(i,j)}\right)_{(k,q)\in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$ من الفضاء $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ بالعلاقة $\lambda_{kq}^{(i,j)} = \delta_{ik}\delta_{jq}$ حيث $\delta_{\alpha\beta}$ هو رمز كرونيكر الذي يُحقّق $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ و $\delta_{\alpha\beta} = 0$ إذا كان $\alpha \neq \beta$.

$$E_{ij} : \quad i \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{العمود } j \downarrow)$$

نُلاحظ بسهولة أنّ الجملة $\mathcal{E} = \left(E_{ij}\right)_{(i,j)\in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$ أساس للفضاء $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ ، نسمّيه الأساس القانوني لـــ $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. ومن ثَمّ يكون $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) = np$ لأنّ np هو عدد عناصر المجموعة $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$. □

IV.2-3. مبرهنة: تكوِّن مجموعة المصفوفات المثلّثيّة العليا $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$، وكذلك مجموعة المصفوفات المثلّثيّة السفلى $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K})$، جبرَين جزئيّين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. أي إنّ كلاً منهما مغلق بالنّسبة إلى العمليات الثّلاث ويحتوي على المصفوفة الواحديّة I_n.

الإثبات

يكفي أن نتحقق أنّ جداء ضرب مصفوفتين من $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ ينتمـــي إلى $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$، لأن التوثّق من كون $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ سهل جدّاً ومتروك للقارئ.
لتكن $M \in \mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ و $N \in \mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$. ولنفترض أنّ $M = (a_{ij})$ و $N = (b_{ij})$. عندئذ يكون

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad i > j \Rightarrow [M \times N]_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{0\text{ ل}} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{0\text{ ل}} = 0$$

ونترك للقارئ أن يدرس بأسلوب مماثل حالة $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K})$. □

IV.2-4. مبرهنة: تكوِّن مجموعة المصفوفات القطريّة $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$، جبراً جزئيّاً تبديليّاً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

الإثبات

الإثبات تحقُّق مباشر ومتروك للقارئ. □

IV.3. مصفوفة تطبيق خطّي

IV.3-1. تعريف: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساساً للفضاء E و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ أساساً للفضاء F.
وأخيراً ليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى F. يُكتب الشعاع $u(e_j)$ بطريقة وحيـــدة كعبارة خطيّة بعناصر الأساس $\mathcal{F}$:

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot f_i$$

وذلك أياً كانت $j \in \mathbb{N}_p$. نســـمّي المصفوفـــة $(a_{ij})_{(i,j)\in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ مصفوفة التطبيق الخطيّ u في الأساسين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$، ونرمز إليها بالرمز $\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$، كما يبيّن الشكل التوضيحيّ التالي:

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

وأخيراً لنلاحظ أنّه إذا كان $\mathcal{F}^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*)$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{F}$، كان $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p, \quad a_{ij} = \langle f_i^*, u(e_j) \rangle$.

تنتج المبرهنة التالية من التعريف والملاحظة السابقة مباشرة.

IV.3-2. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساساً للفضاء E و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ أساساً للفضاء F .
عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}),\ u \mapsto \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

تقابلاً خطيّاً.

IV.3-3. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. و ليكن $\dim E = p$ و $\dim F = n$. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى F، رتبته $\mathrm{rg}\, u = r$.
عندئذ يوجد $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساس للفضاء E ويوجد $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ أساس للفضاء F، بحيث :

$$\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}^{r} & r & 0_{r\times p-r} \\ \hline 0_{n-r\times r} & & 0_{n-r\times p-r} \end{array}\right]}_{p} \; (n \text{ rows}) = J_{n,p,r}$$

الإثبات

لّما كان $\operatorname{rg} u = r$ كان بُعد $\ker u$ مساوياً $p - r$. ليكن إذن $(e_{r+1},\dots,e_p)$ أساساً لـ $\ker u$ ، ولنتمّمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_p)$ للفضاء E . ثُمّ لنعرّف الفضاء الجزئي $G = \operatorname{vect}((e_1,\dots,e_r))$ ، فيكون $E = G \oplus \ker u$.

إنّ مقصور u على G ، أي $u_{|G}$ ، تطبيق خطّي متباين لأنّ

$$\ker u_{|G} = \ker u \cap G = \{0\}$$

ومن ثَمّ إذا عرّفنا $f_i = u(e_i)$ حين يكون $i \in \mathbb{N}_r$ ، كانت الجملة $(f_1,\dots,f_r)$ جملة حرّة في F ، لنتمّمها إذن إلى أساس $\mathcal{F} = (f_1,\dots,f_n)$ للفضاء F . ونتحقق بسهولة أنّ لمصفوفة u في الأساسين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ الشكل الموصوف في نص المبرهنة أي $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = J_{n,p,r}$. □

IV.3-4. مبرهنة: لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعية منتهية البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\dim E = p$ و $\dim F = n$ و $\dim G = m$. وليكن $u \in \mathcal{L}(E,F)$ وكذلك ليكن $v \in \mathcal{L}(F,G)$.عندئذ، أياً كانت الأسس $\mathcal{E} = (e_1,e_2,\dots,e_p)$ للفضاء E ، و $\mathcal{F} = (f_1,f_2,\dots,f_n)$ للفضاء F ، وأخيراً $\mathcal{G} = (g_1,g_2,\dots,g_m)$ للفضاء G ، كان

$$\operatorname{mat}(v \circ u,\mathcal{E},\mathcal{G}) = \operatorname{mat}(v,\mathcal{F},\mathcal{G}) \times \operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})$$

الإثبات

لنضع $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = (a_{ij})$ و $\operatorname{mat}(v,\mathcal{F},\mathcal{G}) = (b_{ij})$. فيكون

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \quad , \quad j \in \mathbb{N}_p$$

$$v(f_i) = \sum_{k=1}^{m} b_{ki} g_k \quad , \quad i \in \mathbb{N}_n$$

ينتج من ذلك أنّه، أياً كان $j \in \mathbb{N}_p$ ، فإنّ

$$v \circ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v(f_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{m} b_{ki} g_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij}\Big) g_k = \sum_{k=1}^{m} c_{kj}\, g_k$$

حيث $c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij}$. إذن $\operatorname{mat}(v \circ u,\mathcal{E},\mathcal{G}) = (c_{ij})$ ، والمساواة السابقة تكافئ المساواة المطلوبة: $\operatorname{mat}(v \circ u,\mathcal{E},\mathcal{G}) = \operatorname{mat}(v,\mathcal{F},\mathcal{G}) \times \operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})$. □

5-3.IV. ملاحظة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $u \in \mathcal{L}(E,F)$ ، و $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساساً للفضاء E ، و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ أساساً للفضاء F . ولنضع أخيراً $M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})$. لمّا كان $\mathcal{E}$ أساساً لـ E كان التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{M}_{p\times1}(\mathbb{K}) \to E,\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{E}}(X) = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$$

تقابلاً خطيّاً. وكذلك يكون التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{F}} : \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K}) \to F,\ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{F}}(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$$

لأنّ $\mathcal{F}$ أساس لـ F .

ليكن x عنصراً من E ، وليكن $y = u(x)$. يُعطى شعاعُ مركّبات x على الأساس $\mathcal{E}$ بالعلاقة $X = \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(x)$ ، وكذلك فإنّ شعاع مركّبات y على الأساس $\mathcal{F}$ يعطى بالعلاقة $Y = \Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(y)$. و يتحقّق القارئ بسهولة أنّ الشعاعين X و Y يرتبطان بالعلاقة

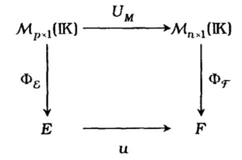
$$Y = M \times X .$$

فإذا عرّفنا التطبيق الخطّي

$$U_M : \mathcal{M}_{p\times1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K}),\ X \mapsto U_m(X) = M \times X$$

صار لدينا $U_M = \Phi_{\mathcal{F}}^{-1} \circ u \circ \Phi_{\mathcal{E}}$.

ويمكن تلخيص ذلك بالقول إنّ المخطّط التالي تبديلي:



6-3.IV. تعريف: لتكن المصفوفة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. نسمي منقول M المصفوفة $^tM = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ المعرّفة كما يلي :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_n, \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

نقول إنّ المصفوفة المربّعة M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ متناظرة إذا وفقط إذا كان $M = {}^tM$. ونقول إنّها تخالفية إذا وفقط إذا كانت تحقّق $M = -{}^tM$. ولقد جرت العادة أن نرمز بالرمز $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة المتناظرة من المرتبة n، وبالرمز $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة التخالفية من المرتبة n.

تلخّص المبرهنة التالية بعض الخواص البسيطة.

7-3.IV. مبرهنة:

1. إنّ التطبيق $\Theta : \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}),\ M \mapsto {}^tM$ تقابلٌ خطّي.
2. أياً كانت $A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ و $B \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$ كان ${}^t(A\times B) = {}^tB \times {}^tA$.
3. أياً كانت المصفوفة القَلوبة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، كانت ${}^tA$ قَلوبة وكان ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.
4. إنّ كلاً من $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ و $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، وإذا كان العدد المميّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2، كان

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{و} \quad \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{و} \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

الإثبات

1. إن إثبات الخاصة 1. مباشر وبسيط نتركه للقارئ.
2. لنفترض أنّ $A = (a_{ij})$ وأنّ $B = (b_{ij})$. عندئذ يكون

$$[{}^t(A\times B)]_{ij} = [A\times B]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} [{}^tB]_{ik} [{}^tA]_{kj} = [{}^tB \times {}^tA]_{ij}$$

وذلك أياً كان $(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$. وهذا ما يثبت الخاصّة 2.

3. لتكن A مصفوفة قَلوبة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، عندئذ نجد $B = A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ بحيث

$$A \times B = B \times A = I_n$$

وبالاستفادة من 2. نجد ${}^tB \times {}^tA = {}^tA \times {}^tB = {}^tI_n = I_n$، ومن ثَمّ تكـون ${}^tA$ قَلوبة، ويكون ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

4. واضح من التعريف أنّ كلاً من $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ و $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
وإذا كان $(E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، كوّنت الجملة $(S_{ij})_{(i,j)\in T_n}$
حيث $T_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2 : i \le j\}$ وحيث

$$\forall (i,j)\in T_n,\quad S_{i,j} = \begin{cases} E_{ii} & : \ i = j \\ E_{ij}+E_{ji} & : \ i \ne j \end{cases}$$

أساساً للفضاء الجزئي $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. إذن

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{card} T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

لنلاحظ، انطلاقاً من التعريف، أنه إذا كان العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ يساوي 2 كان $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. لذلك سنفترض فيما يأتي أنّ العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2.
تكوِّن الجملة $(E_{ij}-E_{ji})_{1\le i<j\le n}$ أساساً للفضاء الجزئي $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$، ومن ثَمّ

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{card}\{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2 : i<j\} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

وأخيراً، أيّاً كان M في $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\cap\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ كان $-M = {}^tM = M$، ومن ثَمّ $M = 0$ لأنّ العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2. إذن من جهة أولى، $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\cap\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$.
ومن جهة ثانية لدينا

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad M = \underbrace{\frac{1}{2}(M+{}^tM)}_{\in\mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M-{}^tM)}_{\in\mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$$

وهذا ما يثبتُ أنّ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. □

IV.3-8. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. و ليكن u في $\mathcal{L}(E,F)$. ليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_p)$ أساساً لـ E، و $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_n)$ أساساً لـ F. ولنضع $\mathcal{E}^* = (e_1^*,\ldots,e_p^*)$ الأساس الثنويّ لـ $\mathcal{E}$، و $\mathcal{F}^* = (f_1^*,\ldots,f_n^*)$ الأساس الثنويّ لـ $\mathcal{F}$. عندئذ يكون

$${}^t\big(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})\big) = \operatorname{mat}({}^tu,\mathcal{F}^*,\mathcal{E}^*)$$

الإثبات

لنضع $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = (a_{ij})$ و $\operatorname{mat}({}^tu,\mathcal{F}^*,\mathcal{E}^*) = (b_{ij})$. عندئذ يكون

$$b_{ij} = \left\langle {}^tu(f_j^*), e_i\right\rangle_{E^*,E} = \left\langle f_j^*, u(e_i)\right\rangle_{F^*,F} = a_{ji}$$ □

4.IV. رتبة مصفوفة

1-4.IV. تعريف: لتكن المصفوفة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. نسمّي أعمدة M الجملـةَ $(C_1(M), C_2(M), \dots, C_p(M))$ من عناصر الفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ المعرّفة كما يلي

$$\forall j \in \mathbb{N}_p, \quad C_j(M) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}.$$

وكذلك نسمّي أسطر M جملةَ العناصر $(R_1(M), R_2(M), \dots, R_n(M))$ من الفضـاء $\mathcal{M}_{1\times p}(\mathbb{K})$ المعرّفة كما يلي

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad R_i(M) = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}.$$

2-4.IV. تعريف: لتكن المصفوفة M من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. نسمّي رتبة المصفوفة M رتبة أعمدتها في الفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. ونرمز إلى هذه الرتبة بالرمز $\operatorname{rg} M$. أي

$$\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{vect}((C_1(M), \dots, C_p(M))).$$

3-4.IV. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. و ليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ أساساً للفضاء E ، و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ أساساً للفضاء F .
عندئذ أياً كان u في $\mathcal{L}(E,F)$ ، لدينا $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} u$ حيث $M = \operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

الإثبات

من جهة أولى، لدينا $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \operatorname{rg}((u(e_1), \dots, u(e_p)))$.

ومن جهة ثانية، لمّا كان $\mathcal{F}$ أساساً لـ F ، كان التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{F}} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to F, \; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{F}}(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$$

تقابلاً خطيّاً، و هو يُحقّق $\forall j \in \mathbb{N}_p, \quad \Phi_{\mathcal{F}}(C_j(M)) = u(e_j)$: إذن

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} u &= \operatorname{rg}\left((\Phi_{\mathcal{F}}(C_1(M)), \dots, \Phi_{\mathcal{F}}(C_p(M)))\right) \\ &= \operatorname{rg}\left((C_1(M), \dots, C_p(M))\right) = \operatorname{rg} M \end{aligned}$$

وهذا يثبت المطلوب. □

IV.4-4. ملاحظة: لتكن M في $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. وليكن التطبيق الخطيّ

$$U_M : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \mapsto X \mapsto M \times X$$

عندئذ يكون $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} U_M$ ، لأن أعمدة المصفوفة M هي صورة الأساس القانوني في الفضاء $\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K})$ وفق التطبيق الخطّي U_M.

تسمح لنا هذه الملاحظة باستنتاج المبرهنة التالية من المبرهنة II.3-4.

IV.4-5. مبرهنة: لتكن M في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. إنّ الخواص التالية متكافئة:

1. المصفوفة M قَلوبة.
2. $\operatorname{rg} M = n$.
3. يوجد R في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ بحيث $M \times R = I_n$.
4. يوجد L في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ بحيث $L \times M = I_n$.

IV.4-5. مبرهنة: لتكن M في $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. عندئذ يكون $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^tM$.

الإثبات

لنعرّف $\mathcal{E}_\ell$ بأنّه الأساس القانوني في $\mathcal{M}_{\ell\times 1}(\mathbb{K})$. ولنرمز بالرمز $\mathcal{E}_\ell^*$ إلى أساسه الثنوي. ولنتأمّل التطبيق الخطّي

$$U_M : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \mapsto X \mapsto M \times X$$

عندئذ يكون لدينا استناداً إلى المبرهنة IV.3-8.

$${}^tM = \operatorname{mat}({}^tU_M, \mathcal{E}_n^*, \mathcal{E}_p^*) \quad \text{و} \quad M = \operatorname{mat}(U_M, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_n)$$

وبالاستفادة من المبرهنة III.3-5. يكون $\operatorname{rg} U_M = \operatorname{rg} {}^tU_M$ ، ومن ثَمّ $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^tM$. □

IV.4-6. نتيجة: لتكن M في $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. إنّ رتبة M هي رتبة أسطرها في الفضاء $\mathcal{M}_{1\times p}(\mathbb{K})$. ومن ثَمّ يكون $\operatorname{rg} M \le \min(n, p)$.

وإذا استفدنا من المبرهنة II.3-5. حصلنا على النتيجة التالية:

IV.4-7. نتيجة: لتكن M في $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ و N في $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$. عندئذ

$$\operatorname{rg} A \times B \le \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$$

وإذا كانت A قَلوبة كان $\operatorname{rg}(A \times B) = \operatorname{rg} B$. وإذا كانت B قَلوبة كان $\operatorname{rg}(A \times B) = \operatorname{rg} A$.

5.IV. تغيير الأساس

1-5.IV. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل IK. وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ أساساً للفضاء E. وأخيراً لتكن $P = (p_{ij})$ مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathrm{IK})$. حتى تكون جملة الأشعّة $\mathcal{A} = (a_1,\dots,a_n)$، حيث $a_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot e_i$، أساساً للفضاء E يلزم ويكفي أن تكون المصفوفةُ P قَلوبةً.

الإثبات

ليكن u التطبيق الخطّي من $\mathcal{L}(E)$ المعرّف بالشرط $\forall j \in \mathrm{IN}_n, u(e_j) = a_j$. عندئذ يكون $P = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$. ومن ثَمّ تكون لدينا التكافؤات التالية:

$(\mathcal{A}$ أساس لـ $E) \Leftrightarrow (\mathcal{A}$ تولّد $E) \Leftrightarrow (n = \mathrm{rg}\, u) \Leftrightarrow (n = \mathrm{rg}\, P) \Leftrightarrow (P$ قَلوبة$)$.

وهذا يثبت المطلوب. □

2-5.IV. تعريف: ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل IK. وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ أساساً للفضاء E، وليكن $\mathcal{E}' = (e'_1,\dots,e'_n)$ أساساً آخر للفضاء E. نسمّي مصفوفة الانتقال من $\mathcal{E}$ إلى $\mathcal{E}'$، مصفوفة التطبيق المطابق I_E، من الفضاء E مزوّداً بالأساس $\mathcal{E}'$ إلى الفضاء نفسه مزوّداً بالأساس $\mathcal{E}$، أي $(E, \mathcal{E}') \xrightarrow{I_E} (E, \mathcal{E})$. ونرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$، فيكون $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \mathrm{mat}\,(I_E, \mathcal{E}', \mathcal{E})$.

3-5.IV. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل IK. وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ أساساً للفضاء E، وليكن $\mathcal{E}' = (e'_1,\dots,e'_n)$ أساساً آخر للفضاء E. عندئذ أيّاً كان $x \in E$ لدينا

$$X = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times X'$$

حيث $X = {}^t[\xi_1,\dots,\xi_n] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathrm{IK})$ هو شعاع مركّبات x على الأساس $\mathcal{E}$، أي $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i$، و $X' = {}^t[\xi'_1,\dots,\xi'_n] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathrm{IK})$ هو شعاع مركّبات العنصر x أيضاً على الأساس $\mathcal{E}'$، أي $x = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i \cdot e'_i$.

الإثبات

لتكن $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = (p_{i\,j})$ ، عندئذ يكون $\forall j \in \mathbb{N}_n,\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i\,j} \cdot e_i$.

ومن ثَمّ

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j \cdot e'_j = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j \cdot (\sum_{i=1}^{n} p_{i\,j} \cdot e_i) = \sum_{i=1}^{n} \cdot (\sum_{j=1}^{n} p_{i\,j} \xi'_j) \cdot e_i$$

ولأنّه لدينا أيضاً $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i$ ، ينتج أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \xi_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i\,j} \cdot \xi'_j \ .$$

وهذا يُكافئ المساواة المطلوبة: $X = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times X'$. □

IV.5-4. ملاحظة: لمّا كان $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}'$ أساسين لـ E كان التطبيقان الخطيان التاليان تقابلين:

$$\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to E,\ [\xi_1, \ldots, \xi_n] \mapsto \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot e_j$$

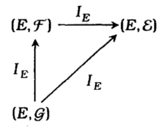
$$\Phi_{\mathcal{E}'} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to E,\ [\zeta_1, \ldots, \zeta_n] \mapsto \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \cdot e'_j$$

ويمكننا التعبير عن المبرهنة السابقة بكتابة: $\forall x \in E,\ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(x) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times \Phi_{\mathcal{E}'}^{-1}(x)$.

IV.5-5. مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ ثلاثة أساسات للفضاء E . عندئذ يكون $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \times P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$.

الإثبات

إذا تأمّلنا المخطّط التبديلي التالي



أمكننا أن نكتب $\mathrm{mat}(I_E, \mathcal{G}, \mathcal{E}) = \mathrm{mat}(I_E, \mathcal{F}, \mathcal{E}) \times \mathrm{mat}(I_E, \mathcal{G}, \mathcal{F})$.

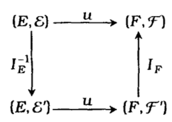
وهذه هي المساواة المطلوبة. □

6-5.IV. مبرهنة: ليكن E و F فضاءين شعاعيّين منتهيي البُعد على حقل IK . وليكن $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}'$ أساسين للفضاء E ، و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ أساسين للفضاء F . وأخيراً ليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$.عندئذ يكون

$$\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \times \mathrm{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{F}') \times (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}.$$

الإثبات

كما في المبرهنة السابقة، يكفي أن ننظر في المخطّط التبديلي التالي



فنجد المطلوب. □

7-5.IV. مبرهنة وتعريف: نقول عن مصفوفتين A و B من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ إنهما متكافئتان إذا وفقط إذا وُجدَتْ مصفوفتان قَلوبتان P من $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ و Q من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ بحيث يكون $B = Q\,A\,P$ ، ونكتب في هذه الحالة $A \approx B$. وتكون العلاقة الثنائيّة:

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_{n\cdot p}(\mathbb{K})\right)^2,$$
$$A \approx B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\ B = Q\,A\,P$$

علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$.

8-5.IV. مبرهنة: لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ ، عندئذ يكون

$$A \approx B \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,B$$

الإثبات

إن الاقتضاء $(\Rightarrow)$ واضح استناداً إلى النتيجة 7-4.IV.

وبالعكس، لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ تُحقّق $\mathrm{rg}\,A = r$. وليكن U_A التطبيق الخطيّ القانوني الموافق لـ A :

$$U_A : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}),\ X \mapsto A\,X$$

فإذا كان $\mathcal{E}_p$ و $\mathcal{E}_n$ الأساسين القانونيين في $\mathcal{M}_{p\times1}(\mathbb{K})$ و $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ على التوالي، كان

$$A = \mathrm{mat}(U_A, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_n)$$

ولكن بمقتضى المبرهنة IV.3-3. يوجد أساسان $\mathcal{E}'_p$ و $\mathcal{E}'_n$ في $\mathcal{M}_{p\times1}(\mathbb{K})$ و $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ على التوالي، بحيث يكون

$$J_{n,p,r} = \mathrm{mat}(U_A, \mathcal{E}'_p, \mathcal{E}'_n)$$

ومن ثَمّ، بالاستفادة من المبرهنة IV.5-6. يكون

$$A = P_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}'_n} J_{n,p,r} (P_{\mathcal{E}_p}^{\mathcal{E}'_p})^{-1}$$

وهذا ما يُثبت أنّ $A \approx J_{n,p,r}$.

فإذا كان $\mathrm{rg}\, B = r = \mathrm{rg}\, A$ كان $B \approx J_{n,p,r} \approx A$. وهذا يُبرهن صحةَ الاقتضاء الثاني أي ($\Leftarrow$). □

IV.5-9. مبرهنة وتعريف: نقول عن مصفوفتين مربّعتين A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ إنهما متشابهتان إذا وفقط إذا وُجِدَتْ مصفوفة قَلوبة P في $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ بحيث يكون $B = PAP^{-1}$، ونكتب في هذه الحالة $A \cong B$. وتكون العلاقة الثنائيّة:

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad A \cong B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\ B = PAP^{-1}$$

علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

IV.5-10. مبرهنة: لتكن A و B مصفوفتين مربّعتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ولنفترض أنهما متشابهتان. عندئذ تتحقّق الخواص التالية:

1. إنّ المصفوفتين ${}^tA$ و ${}^tB$ متشابهتان.
2. إنّ المصفوفتين A^m و B^m متشابهتان، وذلك أياً كانت m في $\mathbb{N}^*$.
3. وإذا كانت A قَلوبة كانت B قَلوبة وكانت المصفوفتان A^{-1} و B^{-1} متشابهتين.

الإثبات

إنّ إثبات هذه المبرهنة بسيط انطلاقاً من التعريف ونتركه تمريناً للقارئ. □

6.IV. أثر مصفوفة وأثر تطبيق خطّي

1-6.IV. تعريف: لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربّعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نسمّي العنصر $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ من $\mathbb{K}$ أثر المصفوفة A، ونرمز إليه بالرمز $\operatorname{tr} A$.

تلخّص المبرهنة التالية خواص أثر مصفوفة.

2-6.IV. مبرهنة:

1. إنّ التطبيق $\operatorname{tr}: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, A \mapsto \operatorname{tr} A$ شكلٌ خطيّ على $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. أياً كانت A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، لدينا $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}({}^tA)$.
3. إنّ أثر المصفوفة الواحديّة يساوي n، أي $\operatorname{tr} I_n = n$.
4. أياً كانت A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، لدينا $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.

الإثبات

إنّ الخواصّ الثلاث الأولى واضحة من التعريف. لنثبت فقط الخاصة الرابعة:

لنضع $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ فيكون

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ [AB]_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \quad \text{و} \quad \forall j \in \mathbb{N}_n,\ [BA]_{jj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}$$

ومن ثَمّ

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}\Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ji}\Big) = \sum_{j=1}^{n} [BA]_{jj} = \operatorname{tr} BA$$

وهذا يُثبت المطلوب. □

تبيّن الخاصة التالية أنّ أثر المصفوفة هو الشكل الخطيّ الوحيد من $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ الـــذي يُحقّــق الشرطين 3. و 4. من المبرهنة السابقة.

3-6.IV. مبرهنة: لنفترض أن العدد المميِّز لـــ $\mathbb{K}$ يساوي 0. وليكن $\Phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ شكلاً خطيّاً على $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ يحقّق الشرطين $\Phi(I_n)=n$ و

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \Phi(AB)=\Phi(BA)$$

عندئذ يكون $\Phi = \operatorname{tr}$.

الإثبات

ليكن $(E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نترك للقارئ أن يتحقق صحةَ الخاصّة التالية:

$$\forall(i,j,k,\ell)\in\mathbb{N}_n^4,\quad E_{ij}E_{\ell k}=\delta_{\ell j}E_{ik}$$

حيث $\delta_{\alpha\beta}$ هو رمز كرونيكر.

ومن ثَمّ، أياً كان الدليلان المختلفان i و j من $\mathbb{N}_n$ ، كان

$$E_{ij}=E_{i1}E_{1j}-E_{1j}E_{i1}$$

لذا يكون $\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad i\neq j\Rightarrow\Phi(E_{ij})=0$.

ومن جهة أخرى، أياً كان الدليل j من $\mathbb{N}_n$ ، المختلف عن 1، كان

$$E_{jj}-E_{11}=E_{j1}E_{1j}-E_{1j}E_{j1}$$

إذن يكون $\forall j\in\mathbb{N}_n,\quad\Phi(E_{jj})=\Phi(E_{11})$.

فإذا عرّفنا $\lambda=\Phi(E_{11})$ ووضعنا $\Psi=\Phi-\lambda\cdot\mathrm{tr}$ ، كان لدينا استناداً إلى ما سبق

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad\Psi(E_{ij})=0$$

نستنتج من ذلك أنّ $\Psi=0$ أو أنّ $\Phi=\lambda\cdot\mathrm{tr}$. ولّما كان $\Phi(I_n)=n$ أمكننا أن نحسب λ لنجد $\lambda=1$. وهنا نستفيد من كوْن العدد المميّز لـ $\mathbb{K}$ يساوي 0 . في الحقيقة يكفي ألاّ يقسمَ العددُ المميّزُ للحقلِ $\mathbb{K}$ العددَ n . وبذلك يكتمل الإثبات. □

4-6.IV. مبرهنة: لتكن A و B مصفوفتين مربّعتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ولنفترض أنهما متشابهتان. عندئذ يكون $\mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}\,B$.

الإثبات

توجد بمقتضى الفرْض مصفوفة قَلوبة P في $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ بحيث $A=PBP^{-1}$. لذا

$\mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}(PBP^{-1})=\mathrm{tr}(P^{-1}PB)=\mathrm{tr}(I_nB)=\mathrm{tr}\,B$. □

5-6.IV. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن التطبيق الخطيّ u في $\mathcal{L}(E)$. عندئذ لا يتعلّق المقدار $\mathrm{tr}(\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}))$ بالأساس المُختار $\mathcal{E}$ للفضاء E . لذلك نسمّيه أثر التطبيق الخطي u ونرمز إليه بالرمز $\mathrm{tr}\,u$.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E}'$ أساساً آخر للفضاء E، ولنضع $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$. فيكون، بمقتضى المبرهنة IV.5-6،

$$\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) = P\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')P^{-1}$$

ينتج من ذلك أنّ $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) \cong \operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')$، ومن ثَم يكون

$$\operatorname{tr}(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})) = \operatorname{tr}(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}'))$$

وهو المطلوب إثباته. □

نستنتج من التعريف السابق ومن خواص أثر المصفوفة النتيجة التالية:

IV.6-6. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$.

1. إنّ التطبيق $\operatorname{tr} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}, u \mapsto \operatorname{tr} u$ شكلٌ خطيّ على $\mathcal{L}(E)$.
2. أياً كان u من $\mathcal{L}(E)$، لدينا $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} {}^t u$.
3. إنّ أثر التطبيق المطابق يساوي $\dim E$، أي $\operatorname{tr} I_E = \dim E$.
4. أياً كانت u و v من $\mathcal{L}(E)$، لدينا $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.
5. إذا كان p إسقاطاً[d] للفضاء E، كان $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} p$.

[d] أي p ∋ $\mathcal{L}(E)$ ويحقّق $p \circ p = p$.

تمرينات

التمرين 1. لتكن $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مصفوفة ثوابتها في حلقة تبديلية A . أثبت أن

. $M^2-(a+d)M+(ad-bc)I_2=0$

التمرين 2. ليكن α و β عددين حقيقيين مختلفين، ولتكن M ∋ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة تحقّق

$$M^2-(\alpha+\beta)M+\alpha\beta I_n=0,\quad M\neq\alpha I_n,\quad M\neq\beta I_n$$

1. أثبت أن بُعد الفضاء الشعاعي الجزئي $V(M)=\text{vect}((M,I_n))$ يساوي 2.
2. أثبت أنه لا توجد في $V(M)$ إلاّ مصفوفتان مختلفتان A و B تحققان الشروط

   . $B\notin\{0,I_n\},\ B^2=B$ و $A\notin\{0,I_n\},\ A^2=A$

   ثم أثبت أن $AB=BA=0$ وأن (A,B) أساس لـ $V(M)$.
3. أثبت أن $V(M)$ جبر جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ، وأنه إذا كانت C ∋ $V(M)$ مصفوفة قَلوبة فإن C^{-1} ∋ $V(M)$.

التمرين 3. لتكن A و B المصفوفتين من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ المعرّفتين كما يلي:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ولتكن المجموعة $\mathscr{E}=\{xA+yB\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}):(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. احسب $(A+B)^n$ أياً كانت n ∋ $\mathbb{N}$.
2. أثبت أن عناصر $\mathscr{E}$ ليست قلوبة في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. أثبت أن البنية $(\mathscr{E},+,\times)$،حيث $+$ و $\times$ هما جمع و ضرب المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ، هي حقل. عيّن حيادي الضرب ومقلوب عنصر غير معدوم فيه، ثم أثبت أن هذا الحقل يشاكل تقابلياً حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$.

التمرين 4. ليكن الفضاء الشعاعي $E = \mathcal{M}_{p\times1}(\mathbb{R})$ ، حيث $p \geq 2$. وليكن $u \in \mathcal{L}(E)$ التطبيق الخطّي الذي يربط كلَّ $X = {}^t[x_1, \ldots, x_p] \in E$ بـ $Y = u(X) = {}^t[y_1, \ldots, y_p] \in E$ ، حيث

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, \quad y_i = \frac{1}{p-1} \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} x_j .$$

I. عيّن $A = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ ، حيث $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ هو الأساس القانوني في E .

II. نرمز بـ I إلى المصفوفة الواحديّة في $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ وبـ J إلى المصفوفة في $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ التي تساوي جميع ثوابتها 1 .

1. احسب J^n عندما $n \in \mathbb{N}$.

2. أثبت أنه أياً كانت $n \in \mathbb{N}$ توجد ثنائية (a_n, b_n) يطلب تعيينها بحيث $A^n = a_n A + b_n I$.

3. أثبت أن A قَلوبة واحسب A^{-1} .

4. أثبت أنه يوجد $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ ، بحيث $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$.

III. لتكن $C = \frac{p-1}{p} A + \frac{1}{p} I$. أثبت أنّ C مصفوفة لإسقاط q في الأساس $\mathcal{E}$. عيّن كلاً من $E_1 = \text{Im}\, q$ و $E_2 = \ker q$ ، ثم عينّ أساساً $\mathcal{B}$ لـ E بحيث تكون المصفوفة $\tilde{A} = \text{mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ مصفوفة قطريّة، وأوجد مصفوفة قَلوبة Q بحيث $A = Q \tilde{A} Q^{-1}$.

التمرين 5. ليكن الفضاء الشعاعي $E = \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$ ، حيث $n \geq 2$. وليكن $\sigma \in \mathcal{S}_n$ تبديلاً على المجموعة $\mathbb{N}_n$. ولننظر في التطبيق الخطّي $p_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ الذي يربط كلَّ شعاع $X = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$ بالشعاع $p_\sigma(X) = {}^t[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$.

1. عبّر باستخدام رمز Kronecker عن المصفوفة $P_\sigma = \text{mat}(p_\sigma, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (a_{ij}^\sigma)_{ij}$. حيث $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ هو الأساس القانوني في E .

2. لتكن $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ، احسب $P_\sigma M$ و $M P_\sigma$ و $P_\sigma M P_\sigma^{-1}$.

3. استنتج أن المصفوفتين التاليتين متشابهتان:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} .$$

التمرين 6. ليكن $X={}^t[x_1,\dots,x_n]$ و $Y={}^t[y_1,\dots,y_n]$ شعاعين من $E=\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathrm{IR})$، يحققان $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$ و $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1$ و $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0$. نضع $M = aX\cdot{}^tX + bY\cdot{}^tY$ حيث (a,b) في IR^2. أثبت أنه يوجد عددان λ و μ بحيث
$M^3+\lambda M^2+\mu M=0$.

ادرس حالة المصفوفة $M=(m_{ij})$ في $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ حيث $m_{ij}=\alpha$ إذا كان $i+j$ زوجياً و $m_{ij}=\beta$ إذا كان $i+j$ فردياً.

التمرين 7. أياً كان a في IR، نعرّف المصفوفة $M_a=(m_{ij})$ في $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ كما يلي

$$m_{ij}=\begin{cases} C_{j-1}^{i-1}\cdot a^{j-i} & : \ j\ge i \\ 0 & : \ j<i \end{cases}$$

1. أثبت أن المجموعة $G=\{M_a\in\mathcal{M}_n(\mathrm{IR}) : a\in\mathrm{IR}\}$ زمرة جزئية من $\mathcal{GL}_n(\mathrm{IR})$ تشاكل تقابلياً $(\mathrm{IR},+)$.
2. لتكن $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$. ولنفترض أنّ $a_{ij}=0$ عندما $i\ge j$، وأنّ $b_{ij}=0$ حين يكون $i\ge j-s$ حيث s في $\{0,\dots,n-1\}$. وأخيراً لتكن المصفوفة $C=AB=(c_{ij})$. أثبت أن $c_{ij}=0$ عندما يكون $i\ge j-s-1$. واستنتج أن $(M_a-I_n)^n=0$.
3. أثبت أنه مهما يكن كثير الحدود P الذي لا تزيد درجته عن $n-1$ من $\mathrm{IR}[X]$، فإنّ
$$P(X)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k P(X+ka)$$
4. لتكن (p,n) في IN حيث $n\ge p>0$. نرمز بالرمز S_n^p إلى عدد التطبيقات الغامرة من IN_n إلى IN_p. أثبت أن $p^n=\sum_{k=1}^{n} C_p^k S_n^k$. مساعدة: يمكن حساب عدد التطبيقات من IN_n إلى IN_p بطريقتين.
5. استنتج قيمة S_n^p. واحسب بوجه خاص S_{n+1}^n و S_{n+2}^n.

الفصل الخامس

المحدِّدات وجمل المعادلات الخطيّة

1.V. التطبيقات المتعدِّدة الخطيّة

1-1.V. تعريف: لتكن p من $\mathbb{N}^*$، ولتكن $E_1, E_2, \ldots, E_p$ و F فضاءات شعاعيّة على حقل $\mathbb{K}$.
نقول عــن تطبيق $f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \to F$ إنّه p-خطّي إذا وفقط إذا كانت التطبيقات:

$$f_{j,A_j} : E_j \to F,\ x_j \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_p)$$

خطيّةً، وذلك أياً كان j من $\mathbb{N}_p$، وأياً كانت $A_j = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_p)$ من $E_1 \times \cdots \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times \cdots \times E_p$.

ونرمز بالرمز $\mathcal{L}_p(E_1, \ldots, E_p; F)$ إلى مجموعة التطبيقات الــ p-خطّية من الفضــاء $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ إلى F. وهي تكوِّن فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$.

وأخيراً، عندما يكون الفضاء الشعاعي F هو الحقل $\mathbb{K}$ نفسه ، نسمّي عناصر الفضــاء الشعاعي $\mathcal{L}_p(E_1, \ldots, E_p; \mathbb{K})$ أشكالاً p-خطّيةً على $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$.

2-1.V. ملاحظة: أياً كان التطبيق الــ p-خطّي : $f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \to F$، تتحقّــق الخاصة التالية:

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad (\exists j \in \mathbb{N}_p,\ x_j = 0) \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_p) = 0$$

وذلك لأنه وفقاً لتعريف التطبيقات الــ p-خطّية يكون التطبيق $f_{j,(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_p)}$ خطياً.

V.1-3. تعريف: لتكن p في $\mathbb{N}^*$، وليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$. نقول عن تطبيق p-خطّي f من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$ إنه متناظرٌ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall(i,j)\in \mathbb{N}_p^2,\ \forall(x_1,\ldots,x_p)\in E^p,$$
$$i<j \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) = f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)$$

ونقول عن التطبيق الـ p-خطّي f إنه تخالفيٌّ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall(i,j)\in \mathbb{N}_p^2,\ \forall(x_1,\ldots,x_p)\in E^p,$$
$$i<j \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) = -f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)$$

وأخيراً نقول عن التطبيق الـ p-خطّي f إنه متناوبٌ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall(i,j)\in \mathbb{N}_p^2,\ \forall(x_1,\ldots,x_p)\in E^p,$$
$$(i<j)\wedge(x_i=x_j) \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) = 0$$

ونرمز بالرمز $\mathcal{L}_p^S(E^p;F)$ إلى فضاء التطبيقات الـ p-خطّية المتناظرة من E^p إلى F، وبالرمز $\mathcal{L}_p^A(E^p;F)$ إلى فضاء التطبيقات الـ p-خطّية المتناوبة من E^p إلى F.

V.1-4. صياغة جديدة : ليكن p في $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$، وليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$. أياً كان التطبيق الـ p-خطّي f من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$، وأياً كان التبديل σ من $\mathcal{S}_p$، نرمز بالرمز $\bar{\sigma}(f)$ إلى التطبيق الـ p-خطّي المعرَّف بالعلاقة

$$\forall(x_1,\ldots,x_p)\in E^p,\quad \bar{\sigma}(f)(x_1,\ldots,x_p) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})$$

وهكذا، يمكننا صياغة التعريف السابق كما يلي:

- يكون f في $\mathcal{L}_p(E^p;F)$ متناظراً إذا وفقط إذا كان: $\forall\sigma\in\mathcal{S}_p,\ \bar{\sigma}(f)=f$.
- ويكون f في $\mathcal{L}_p(E^p;F)$ تخالفيّاً إذا وفقط إذا كان: $\forall\sigma\in\mathcal{S}_p,\ \bar{\sigma}(f)=\Delta(\sigma)\cdot f$.

حيث $\Delta(\sigma)$ هو توقيع التبديل σ، ويساوي $(-1)^{k_\sigma}$ إذا أمكن كتابة σ كناتج تركيب k_σ مناقلةً.[♣]

[♣] راجع خواص الزمرة المتناظرة في كتاب مبادئ الجبر المجرد.

V.1-5. مبرهنة : ليكن p و $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$، وليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$.
وليكن التطبيق الـــ p-خطّي f من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$. عندئذ
1. إذا كان f متناوباً، كان f تخالفياً.
2. وإذا كان العدد المميِّز لـــ $\mathbb{K}$ مختلفاً عن 2، وكان f تخالفياً، كان f متناوباً.

الإثبات

1. لنفترض أنّ f متناوبٌ. وليكن (i,j) و $\mathbb{N}_p^2$ بحيث $i<j$، و $(x_1,\ldots,x_p)$ و E^p.
عندئذ يكون لدينا

$$0 = f(x_1,\ldots,\underbrace{x_i+x_j}_{\text{الموقع } i},\ldots,\underbrace{x_i+x_j}_{\text{الموقع } j},\ldots,x_p) = f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots,x_p) + f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) + f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p) + f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_p)$$

ولمّا كان f متناوباً، كان لدينا

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots,x_p)=0 \text{ و } f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_p)=0 .$$

ينتج من ذلك أنّ

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p)+f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)=0$$

وهذا يثبت أنّ f تخالفيّ.

2. ليكن (i,j) و $\mathbb{N}_p^2$، بحيث $i<j$، وليكن $x=(x_1,\ldots,x_p)$ و E^p، بحيث $x_i=x_j$.
ولنتأمّل المُناقلة $\sigma=\tau_{ij}=(i,j)$، أي التي تُبادل بين الدليلين i و j. لمّا كان f تخالفيّاً، كان لدينا

$$\overline{\sigma}(f)(x)=\Delta(\sigma)\cdot f(x)=-f(x)$$

ولدينا، من جهة أخرى،

$$\overline{\sigma}(f)(x)=f(x)$$

لأنّ $x_i=x_j$. نستنتج أنّ $f(x)=-f(x)$ أو $2f(x)=0$. وبالاستفادة من كوْن العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2، ينتج إذن أنّ $f(x)=0$. والتطبيق الـــ p-خطّي f متناوبٌ. □

تبيّن المبرهنة السابقة تكافؤ مفهومَي تناوب وتخالف التطبيقات المتعدِّدة الخطيّة، عندما يكون العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2.

V.1-6. مبرهنة : ليكن $p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ ، وليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقــل $\mathbb{K}$.

وليكن التطبيق الــ p - خطّي f من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$. لنعرّف التطبيق

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p} \Delta(\sigma)\cdot\overline{\sigma}(f)$$

عندئذ يكون $\mathcal{A}(f)$ تطبيقاً p - خطّياً متناوباً، نسمّيه التطبيق الــ p - خطّي المتنـــاوب المبني على f .

الإثبات

إنّ $\mathcal{A}(f)$ تطبيقٌ p - خطّي لأنه عبارة خطية بتطبيقات من $\mathcal{L}_p(E^p;F)$. لنثبت أنــه متناوبٌ.

ليكن $(i, j) \in \mathbb{N}_p^2$ ، بحيث $i < j$ ، وليكن $x = (x_1,\ldots,x_p) \in E^p$ ، بحيث $x_i = x_j$.

ولنتأمّل المُناقلة $\tau = \tau_{ij} = (i, j)$ ، أي التي تُبادل بين الدليلين i و j . وأخيراً لنذكّر بالرمز A_p الذي يرمز إلى الزمرة المتناوبة وهي الزمرة الجزئية من $\mathcal{S}_p$ المؤلّفة من التباديـــل التي يســـاوي توقيعها $+1$. لتكن $B = \{\tau\circ\sigma \in \mathcal{S}_p : \sigma \in A_p\}$ ، عندئذ تكون B هي مجموعة التباديـــل ذات التوقيع -1 ، أي: $B = \mathcal{S}_p \setminus A_p$. ومن ثَمّ

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{\sigma\in A_p} \Delta(\sigma)\cdot\overline{\sigma}(f) + \sum_{\sigma\in A_p} \Delta(\tau\circ\sigma)\cdot\overline{\tau\circ\sigma}(f)$$

إذن

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{\sigma\in A_p} (\overline{\sigma}(f) - \overline{\tau\circ\sigma}(f))$$

ومنه

$$\mathcal{A}(f)(x) = \sum_{\sigma\in A_p} (f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)}) - f(x_{\tau\circ\sigma(1)},\ldots,x_{\tau\circ\sigma(p)}))$$

ولكن لتكن $\sigma \in A_p$ و $k \in \mathbb{N}_p$:

- فإذا كان $\sigma(k) \notin \{i, j\}$ ، كان $\sigma(k) = \tau\circ\sigma(k)$ ومن ثَمّ $x_{\sigma(k)} = x_{\tau\circ\sigma(k)}$.
- وإذا كان $i = \sigma(k)$ ، كان $j = \tau\circ\sigma(k)$ ومن ثَمّ $x_{\sigma(k)} = x_i = x_j = x_{\tau\circ\sigma(k)}$.
- وإذا كان $j = \sigma(k)$ ، كان $i = \tau\circ\sigma(k)$ ومن ثَمّ $x_{\sigma(k)} = x_j = x_i = x_{\tau\circ\sigma(k)}$.

ينتج من ذلك أنّ $(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)}) = (x_{\tau\circ\sigma(1)},\ldots,x_{\tau\circ\sigma(p)})$ ، ومن ثَمّ $\mathcal{A}(f)(x) = 0$.

ونكون بذلك قد أثبتنا أنّ $\mathcal{A}(f)$ متناوبٌ، وهذا يُكمل الإثبات. □

وأخيراً نُنهي هذه الفقرة بالخاصّة المهمّة التالية للتطبيقات المتعدّدة الخطيّة المتناوبة:

7-1.V. مبرهنة : ليكن p في $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$، وليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$. وليكن التطبيق الـ p- خطّي المتناوب f من $\mathcal{L}_p^A(E^p;F)$. عندئذ لا تتغيّر قيمة f عند $(a_1,\ldots,a_p)$ من E^p إذا أضفنا إلى أحد الأ... وليكن a_i تركيباً خطيّاً ما $\sum_{j\in\mathbb{N}_p\setminus\{i\}}\lambda_j a_j$ لبقيّة الأشعة $(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_p)$، أي

$$f(a_1,\ldots,a_p)=f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+\sum_{j\in\mathbb{N}_p\setminus\{i\}}\lambda_j a_j,a_{i+1},\ldots,a_p)$$

الإثبات

تنتج صحة هذه الخاصّة من المساواة البسيطة التالية:

$$\begin{aligned}f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+\sum_{j\in\mathbb{N}_p\setminus\{i\}}\lambda_j a_j,a_{i+1},\ldots,a_p)&=f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_p)\\&+\sum_{j\in\mathbb{N}_p\setminus\{i\}}\lambda_j f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\ldots,a_p)\end{aligned}$$

ثُم نستفيدُ من كوْنِ f متناوباً، فيكمُل الإثبات. □

2.V. المُحدِّدات

1-2.V. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n في $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E. <u>يوجد</u> شكـــل n- خطيّ متنـــاوب <u>وحيد</u> f يُحقّق الشرط $f(e_1,\ldots,e_n)=1$. نرمز إلى f بالرمز $\det_{\mathcal{E}}$، ونســـمّيه المُحدِّد بالأساس $\mathcal{E}$. وتكون الجملة $(\det_{\mathcal{E}})$ أساساً للفضاء $\mathcal{L}_n^A(E^n;\mathbb{K})$، أي يكون

$$\mathcal{L}_n^A(E^n;\mathbb{K})=\mathbb{K}\cdot\det_{\mathcal{E}}$$

وأخيراً، إذا كان $\mathcal{E}^*=(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ هو الأساس الثنويّ للأساس $\mathcal{E}$، كان

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(x_1,\ldots,x_n)&=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\Delta(\sigma)\cdot\prod_{j=1}^{n}\left\langle e_j^*,x_{\sigma(j)}\right\rangle\\&=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\Delta(\sigma)\cdot\prod_{j=1}^{n}\left\langle e_{\sigma(j)}^*,x_j\right\rangle\end{aligned}$$

وذلك أياً كان $(x_1,\ldots,x_n)$ في E^n.

الإثبات

لنبدأ أولاً بإثبات الوجود. ليكن الشكل الـ n- خطيّ على E المعرّف بالعلاقة

$$\vartheta : E^n \to \mathbb{K},\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \prod_{j=1}^{n} \left\langle e_j^*, x_j \right\rangle$$

ولنضع $\det_{\mathcal{E}} = \mathcal{A}(\vartheta)$. نعلم بمقتضى المبرهنة 6-1.V أنّ $\det_{\mathcal{E}}$ شكلٌ n- خطيٌّ متنـــاوبٌ. ويكون

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{E}}(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \Delta(\sigma)\cdot \bar{\sigma}(\vartheta)(x_1,\dots,x_n) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \Delta(\sigma)\cdot \prod_{j=1}^{n} \left\langle e_j^*, x_{\sigma(j)} \right\rangle \qquad (1) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \Delta(\sigma^{-1})\cdot \prod_{j=1}^{n} \left\langle e_j^*, x_{\sigma^{-1}(j)} \right\rangle \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \Delta(\sigma)\cdot \prod_{j=1}^{n} \left\langle e_{\sigma(j)}^*, x_j \right\rangle \qquad (2)
\end{aligned}$$

ونلاحظ أنّ

$$\det_{\mathcal{E}}(e_1,\dots,e_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \Delta(\sigma)\cdot \prod_{j=1}^{n} \left\langle e_j^*, e_{\sigma(j)} \right\rangle = \Delta(I)\cdot \prod_{j=1}^{n} \left\langle e_j^*, e_j \right\rangle = 1$$

وبذلك نكون قد أكملنا إثبات جزء الوجود في المبرهنة، لنثبت إذن الوحدانية.

ليكن $g \in \mathcal{L}_n^A(E^n;\mathbb{K})$. ولنعرّف $h = g - g(e_1,\dots,e_n)\cdot \det_{\mathcal{E}}$. من الواضح أنّ h شكلٌ n- خطيٌّ متناوبٌ ويُحقّق $h(e_1,\dots e_n) = 0$. ولنتأمل تطبيقاً ما $\nu : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$.

- إذا لم يكن ν متبايناً، وُجِدَ دليلان $i \neq j$ بحيث $\nu(i) = \nu(j)$، وينتج من ذلك أنّ

$$h(e_{\nu(1)},\dots,e_{\nu(n)}) = 0$$

لأن h متناوبٌ.

- وإذا كان ν متبايناً، كان $\nu \in \mathcal{S}_n$ وكان

$$h(e_{\nu(1)},\dots,e_{\nu(n)}) = \bar{\nu}(h)(e_1,\dots,e_n) = \Delta(\nu)\cdot h(e_1,\dots,e_n) = 0$$

نستنتج من المناقشة السابقة أنّ

$$\forall (i_1,\dots,i_n) \in (\mathbb{N}_n)^n,\quad h(e_{i_1},\dots,e_{i_n}) = 0 \qquad (*)$$

لتكن $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$، فيكــون $\forall j\in \mathbb{N}_n,\ x_j=\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}e_i$، حيث $\xi_{ij}=\left\langle e_i^*,x_j\right\rangle$.

وعندئذ

$$\begin{aligned}h(x_1,\dots,x_n)&=\sum_{i_1=1}^{n}\xi_{i_1 1}h(e_{i_1},x_2,\dots,x_n)\\&=\sum_{i_1=1}^{n}\xi_{i_1 1}\sum_{i_2=1}^{n}\xi_{i_2 2}h(e_{i_1},e_{i_2},\dots,x_n)\\&=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}\xi_{i_1 1}\xi_{i_2 2}\cdots\xi_{i_n n}h(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})=0\end{aligned}$$

إذن $h=0$ أو $g=g(e_1,\dots,e_n)\cdot\det_{\mathcal{E}}$، وهذا يُثبتُ المطلوب. □

V.2-2. ملاحظة: إذا كان $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$، وكان $\forall j\in \mathbb{N}_n,\ x_j=\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}e_i$ حيــث $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ أساس للفضاء E. كان

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(x_1,\dots,x_n)&=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\Delta(\sigma)\,\xi_{1\,\sigma(1)}\xi_{2\,\sigma(2)}\cdots\xi_{n\,\sigma(n)}\\&=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\Delta(\sigma)\,\xi_{\sigma(1)\,1}\xi_{\sigma(2)\,2}\cdots\xi_{\sigma(n)\,n}\end{aligned}$$

وذلك بمقتضى المبرهنة السابقة.

V.2-3. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي $n\in\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{A}=(a_1,\dots,a_n)$ عنصراً من E^n. عندئذ تكون الخواص الثلاث التالية متكافئة:

1. الجملة $\mathcal{A}$ أساس للفضاء E.
2. أياً كان الأساس $\mathcal{E}$ للفضاء E، فلدينا $\det_{\mathcal{E}}(a_1,\dots,a_n)\neq 0$.
3. يوجد أساس $\mathcal{E}$ للفضاء E، بحيث $\det_{\mathcal{E}}(a_1,\dots,a_n)\neq 0$.

الإثبات

$1\Leftarrow 2$. ليكن $\mathcal{E}$ أساساً ما لـــ E، نجد، بمقتضى المبرهنة السابقة، عنصراً $\lambda\in\mathbb{K}$ بحيث $\det_{\mathcal{E}}=\lambda\det_{\mathcal{A}}$. فمن جهة أولى،يكون $\det_{\mathcal{E}}(a_1,\dots,a_n)=\lambda\det_{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n)=\lambda$.

ومن جهة ثانية،يكون $1=\det_{\mathcal{E}}(e_1,\dots,e_n)=\lambda\det_{\mathcal{A}}(e_1,\dots,e_n)$. إذن

$.0\neq\lambda=\det_{\mathcal{E}}(a_1,\dots a_n)$

.2 ⇐ .3 هذا اقتضاء تافه، لوجود أساس للفضاء E .

.3 ⇐ .1 إنّ الجملة $\mathcal{A}$ حرّة، وإلاّ أمكن التعبير عن أحد الأشعة $a_1,\dots,a_n$ وليكن a_i مثلاً كعبارة خطيّة $a_i = \sum_{j\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}} \lambda_j a_j$ لبقية الأشعة. ومن ثَمّ يكون، استناداً إلى المبرهنة 7-1.V :

$$\det_{\mathcal{E}}(a_1,\dots,a_n) = \det_{\mathcal{E}}(a_1,\dots,a_{i-1},a_i - \sum_{j\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}} \lambda_j a_j, a_{i+1},\dots,a_n)$$

$$\det_{\mathcal{E}}(a_1,\dots,a_{i-1},0,a_{i+1},\dots,a_n) = 0$$

وبذلك يتم المطلوب. ❐

4-2.V. نتيجة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n و $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{A} = (a_1,\dots,a_n)$ جملة من E . إذا كانت $\mathcal{A}$ جملة مرتبطة خطيّاً كان

$$\det_{\mathcal{E}}(a_1,\dots,a_n) = 0$$

أياً كان الأساس $\mathcal{E}$ للفضاء E .

3.V. مُحدِّد تطبيق خطيّ من فضاء شعاعي إلى نفسه

1-3.V. مبرهنة وتعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n و $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u و $\mathcal{L}(E)$. يوجد عنصر وحيد $\det u$ و $\mathbb{K}$ ، نسمّيه مُحدِّد التطبيق الخطيّ u ، يُحقّق الشرط

$$\forall f \in \mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K}),\ \forall (x_1,\dots,x_n)\in E^n,$$

$$f(u(x_1),\dots,u(x_n)) = \det u \cdot f(x_1,\dots,x_n)$$

الإثبات

ليكن f عنصراً من $\mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K})$. ولنعرّف $\Phi_u(f)$ كما يلي

$$\Phi_u(f) : E^n \to \mathbb{K},\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto f(u(x_1),\dots,u(x_n))$$

من الواضح أنّ $\Phi_u(f)$ شكلٌ n– خطّي متناوبٌ على E . لنتأمّل إذن التطبيق الخطيّ

$$\Phi_u : \mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K}) \to \mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K}),\ f \mapsto \Phi_u(f)$$

لّما كان $\dim \mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K}) = 1$ ، كان $\dim \mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K})) = 1$ وكان التطبيق المطابق $(I_{\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K}))})$ أساساً للفضاء $\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K}))$. إذن يوجد عدد وحيد $\det u$ بحيث يكون $\Phi_u = \det u \cdot I_{\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K}))}$. وتُكافئ هذه المساواة العلاقة المطلوبة. ❐

2-3.V. نتيجة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n و $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u و $\mathcal{L}(E)$، و $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ أساساً ما للفضاء E. عندئذ يكون $\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1),\dots,u(e_n))$.

الإثبات

لّما كان لدينا

$$\forall f \in \mathcal{L}_n^A(E^n,\mathbb{K}),\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,$$

$$f(u(x_1),\dots,u(x_n)) = \det u \cdot f(x_1,\dots,x_n)$$

نتجت العلاقة المطلوبة بأخذ $f = \det_{\mathcal{E}}$ و $(x_1,\dots,x_n) = \mathcal{E}$. □

3-3.V. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n و $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ يكون

1. $\det I_E = 1$
2. $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$ $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in \mathcal{L}(E),$
3. $\det u = \det {}^t u$ $\forall u \in \mathcal{L}(E),$
4. $\det u \circ v = \det u \cdot \det v$ $\forall (u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2,$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ أساساً ما للفضاء E، وليكن $\mathcal{E}^* = (e_1^*,\dots,e_n^*)$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$.

1. نعلم بمُقتضى المبرهنة السابقة أنّ

$$\det I_E = \det_{\mathcal{E}}(I_E(e_1),\dots,I_E(e_n)) = \det_{\mathcal{E}}(e_1,\dots,e_n) = 1$$

2. وكذلك لدينا

$$\det(\lambda u) = \det_{\mathcal{E}}(\lambda u(e_1),\dots,\lambda u(e_n)) = \lambda^n \det_{\mathcal{E}}(u(e_1),\dots,u(e_n)) = \lambda^n \det u$$

3. لتكن المصفوفتان $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) = (a_{ij})$ و $\mathrm{mat}({}^t u,\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*) = (b_{ij})$. نعلم أنّه، أياً كان j و $\mathbb{N}_n$، فإنّ

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i \quad \text{و} \quad {}^t u(e_j^*) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot e_i^*$$

وكذلك أنّ $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2,\quad a_{ij} = b_{ji}$.

لذلك يمكننا أن نكتبَ استناداً إلى النتيجة 2-2.V.

$$\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1),\dots,u(e_n)) = \sum_{\sigma\in S_n} \Delta(\sigma)\cdot\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)\,j}$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} \Delta(\sigma)\cdot\prod_{j=1}^{n} b_{j\,\sigma(j)} = \det_{\mathcal{E}^*}({}^t u(e_1^*),\dots,{}^t u(e_n^*)) = \det {}^t u$$

4. لمّا كان التطبيق

$$f : E^n \to \mathbb{K},\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(v(x_1),\dots,v(x_n))$$

شكلاً n- خطيّاً متناوباً على E، كان

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in E^n,\ f(u(x_1),\dots,u(x_n)) = \det u\cdot f(x_1,\dots,x_n)$$

أو أياً كان $(x_1,\dots,x_n)$ من E^n، يكُن

$$\det_{\mathcal{E}}(v\circ u(x_1),\dots,v\circ u(x_n)) = \det u\cdot \det_{\mathcal{E}}(v(x_1),\dots,v(x_n))$$

وإذا أخذنا $(x_1,\dots,x_n) = (e_1,\dots,e_n)$ نتج

$$\det v\circ u = \det_{\mathcal{E}}(v\circ u(e_1),\dots,v\circ u(e_n))$$
$$= \det u\cdot \det_{\mathcal{E}}(v(e_1),\dots,v(e_n)) = \det u\cdot \det v$$

وهو المطلوب إثباته. □

4-3.V. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً بُعده منته ويساوي n و $\mathbb{N}^*$ على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u و $\mathcal{L}(E)$. يكون u قَلوباً إذا وفقط إذا كان $\det u \neq 0$، وفي هذه الحالة يكون

$$\det u^{-1} = \frac{1}{\det u}$$

الإثبات

يكون u قَلوباً إذا وفقط إذا كان $n = \operatorname{rg} u$، وهذا يُكافئ كـوْن $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ جملة حرّة. وهذا بدوره يُكافئ كوْن

$$\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1),\dots,u(e_n)) \neq 0$$

وتنتج المساواة الأخيرة من العلاقة $u\circ u^{-1} = I_E$ وذلك بمقتضى المبرهنة السابقة. □

4.V. مُحدِّد مصفوفة مربّعة

1-4.V. تعريف: لتكن $M = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $1 \le n$ على حقل $\mathbb{K}$. نسمّي محدِّد أعمدة المصفوفة M بالأساس القانوني $\mathcal{E}_n$ لـ $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ مُحدِّد المصفوفة M ونرمز إليه بالرمز $\det M$، أي

$$\det M = \det_{\mathcal{E}_n}(C_1(M), \dots, C_n(M))$$

حيث $(C_j(M))_{j\in\mathbb{N}_n}$ هي أعمدة المصفوفة M. تسمح لنا النتيجة 2-2.V. أن نكتبَ إذن

$$\det M = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \Delta(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \Delta(\sigma)\cdot\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)\,j}$$

2-4.V. ملاحظات:

- ❖ تبيّن المساواة السابقة مباشرة أنّ $\det M = \det {}^tM$.
- ❖ ومن ناحية أخرى، يبيّن التعريف السابق أنه إذا تأمّلنا التطبيق الخطّي

$$u_M : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}),\ X \mapsto MX$$

حيث $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، كان $\det M = \det u_M$.

- ❖ إذا أُجريَ على أعمدة (أسطر) مصفوفة مربّعة M، تبديل σ ضُرِبتْ قيمة $\det M$ بالعدد $\Delta(\sigma)$. وذلك لأنّ المحدِّد شكل خطّي متناوبٌ فهو إذن تخالفي.
- ❖ لا تتغيّر قيمة مُحدِّد مصفوفة إذا جمعنا إلى أحد أعمدتها (أسطرها) عبارة خطيّة في بقية الأعمدة (الأسطر)، وذلك استناداً إلى المبرهنة 7-1.V.
- ❖ وبناءً على المبرهنة 3-3.V. والملاحظة الأولى يكون

1. $\det I_n = 1$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad \det(\lambda M) = \lambda^n \det M$
3. $\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2,\quad \det(MN) = \det M \cdot \det N$

V.5. حساب المحدّدات

V.5-1. مبرهنة: لتكن $M = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل IK . ولنفترض أنّ $n = p + q$ حيث (p,q) ∋ $\mathbb{N}^{*2}$، وأنّ المصفوفة M تُكتب بالشكل

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

حيث $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ و $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ و $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$ و 0 هي المصفوفة الصفريّة في $\mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$. عندئذ يكون $\det M = \det A \cdot \det B$.

الإثبات

لنرمز بالرموز a_1، a_2، ...، a_p، $a_{p+1} = b_{p+1} + c_{p+1}$، ...، $a_n = b_n + c_n$ إلى أعمدة المصفوفة M . أي

$$a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{pk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq p; \quad a_k = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{pk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{c_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{p+1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}}_{b_k}, \quad p+1 \leq k \leq n;$$

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ الأساس القانوني لـ $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. ولنعرّف $E' = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$ و $E'' = \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ و $\mathcal{E}' = (e_1, \dots, e_p)$ و $\mathcal{E}'' = (e_{p+1}, \dots, e_n)$. فيكون $a_j \in E'$ أياً كان j في $\mathbb{N}_p$.

لنتأمّل الشكل الـ p-خطّي المتناوب

$$f : E'^p \to \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_p) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_p, a_{p+1}, \dots, a_n)$$

لمّا كان $(\det_{\mathcal{E}'})$ أساساً للفضاء $\mathcal{L}_p^A(E'^p; \mathbb{K})$ أمكننا إيجاد λ في IK بحيث $f = \lambda \det_{\mathcal{E}'}$. ويكون $\lambda = f(e_1, \dots, e_p)$.

ومنه

$$(*) \qquad \det M = f(a_1, \dots, a_p) = \lambda \cdot \det_{\mathcal{E}'}(a_1, \dots, a_p) = f(e_1, \dots, e_p) \cdot \det A$$

من جهة أخرى، لمّا كان c_j في $E' = \text{vect}(e_1,\dots,e_p)$ أياً كان j في $\{p+1,\dots,n\}$، ولأن جمع عبارة خطية ما في الأشعة $(e_1,\dots,e_p)$ إلى العمود a_j، حيث j في $\{p+1,\dots,n\}$، لا يغيِّر قيمة المُحدِّد

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1,\dots,e_p,c_{p+1}+b_{p+1},\dots,c_n+b_n)$$

نتج لدينا أنّ

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1,\dots,e_p,b_{p+1},\dots,b_n) \qquad (**)$$

وأخيراً، لمّا كان

$$g : E''^q \to \mathbb{K},\ (x_{p+1},\dots,x_n) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(e_1,\dots,e_p,x_{p+1},\dots,x_n)$$

شكلاً q- خطياً متناوباً على E''، يوجد μ في $\mathbb{K}$ بحيث $g = \mu \det_{\mathcal{E}''}$، ويكون

$$\mu = g(e_{p+1},\dots,e_n) = \det_{\mathcal{E}}(e_1,\dots,e_n) = 1$$

ينتج من ذلك أنّ $g = \det_{\mathcal{E}''}$، و بالاستفادة من (**) يكون

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1,\dots,e_p,b_{p+1},\dots,b_n) = g(b_{p+1},\dots,b_n) = \det_{\mathcal{E}''}(b_{p+1},\dots,b_n) = \det B$$

وبالعودة إلى العلاقة (*) نجد $\det M = \det A \cdot \det B$، فيكمُل الإثبات. □

يمكننا بالتدريج تعميم المبرهنة السابقة على النحو التالي:

2-5.V. مبرهنة: لتكن M في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل $\mathbb{K}$. ولنفترض أن المصفوفة M مثلثيّة كُتليّاً، أي أنه توجد $(p_1,\dots,p_m)$ في $\mathbb{N}^{*m}$ بحيث $n = \sum_{i=1}^{m} p_i$، وتوجد مصفوفات $(A_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_m^2}$ بحيث تكون A_{ij} في $\mathcal{M}_{p_i \times p_j}(\mathbb{K})$ وتكون A_{ij} مصفوفة صفريّة حين يكون $i > j$، وأخيراً تُكتب M بالشكل:

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & & A_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{mm} \end{bmatrix}$$

عندئذ يكون $\det M = \prod_{k=1}^{m} \det A_{kk}$.

V.5-3. مبرهنة: لتكن $M=(a_{ij})$ و $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n \geq 1$ على حقل $\mathbb{K}$.
ولنعرّف أياً كانت (i,j) في $\mathbb{N}_n^2$ المصفوفة M_{ij} في $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ التي نحصل عليها بحذف السطر ذي الدليل i والعمود ذي الدليل j من المصفوفة M. عندئذ يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \det M = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij}, \qquad (*)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \det M = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij}, \qquad (**)$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني لـ $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. إنّ محدِّد المصفوفة M هو محدِّد أعمدها بالأساس $\mathcal{E}$. أي

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i \quad \text{و} \quad \det M = \det_{\mathcal{E}}(C_1,\ldots,C_n)$$

لنثبّت عنصراً j في $\mathbb{N}_n$. لمّا كان التطبيق

$$\mathcal{M}_{n\cdot 1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ x \mapsto \det_{\mathcal{E}}(C_1,\ldots,C_{j-1},x,C_{j+1},\ldots,C_n)$$

خطيّاً، كان بالإمكان أن نكتب

$$\begin{aligned}\det M &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \det_{\mathcal{E}}(C_1,\ldots,C_{j-1},e_i,C_{j+1},\ldots,C_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{j-1} \cdot \det_{\mathcal{E}}(e_i,C_1,\ldots,C_{j-1},C_{j+1},\ldots,C_n)\end{aligned}$$

حيث تنتج المساواة الأخيرة من كوْن توقيع الدورة $\sigma_j=(1,2,\ldots,j)$ يساوي $\Delta(\sigma_j)=(-1)^{j-1}$.

لحساب المُحدِّد $\det_{\mathcal{E}}(e_i,C_1,\ldots,C_{j-1},C_{j+1},\ldots,C_n)$ نقوم بتطبيق التبديل الممثَّل بالدورة $\sigma_i=(1,2,\ldots,i)$، والذي يساوي توقيعه $\Delta(\sigma_i)=(-1)^{i-1}$، على أسطر المصفوفة التي أعمدها هي $(e_i,C_1,\ldots,C_{j-1},C_{j+1},\ldots,C_n)$ فتصبح قيمة المُحدِّد

$$\det_{\mathcal{E}}(e_i,C_1,\ldots,C_{j-1},C_{j+1},\ldots,C_n)$$

مساويةً للمقدار

$$(-1)^{i-1}\det\begin{bmatrix} 1 & a_{i1} & \cdots & a_{i\,j-1} & a_{i\,j+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ & a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وتُكتب هذه النتيجة بالشكل التالي

$$\det_{\mathcal{E}}(e_i, C_1, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots, C_n) = (-1)^{i-1}\det\left[\begin{array}{c|c} 1 & a_{i1}\ldots a_{in} \\ \hline 0 & \\ \vdots & M_{ij} \\ 0 & \end{array}\right] = (-1)^{i-1}\det M_{ij}$$

وبالعودة إلى $\det M$ نجد

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{j-1}\cdot(-1)^{j-1}\det M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot\det M_{ij}$$

وهذا يثبت المساواة (*).

وتنتج المساواة (**) من السابقة بالاستفادة من كون $\det M = \det {}^tM$. □

4-5.V. ملاحظات:

- تسمّى العلاقةُ (*) في المبرهنة السابقة نشرَ مُحدِّد M وفق العمود ذي الدليل j . وتسمّى العلاقة (**) في المبرهنة نفسها نشرَ مُحدِّد M وفق السطر ذي الدليل i .
- تنتج من المبرهنة السابقة الحالتان الخاصّتان التاليتان:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = ab' - ba'$$

و

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - a'bc'' - ab''c'$$

حيث يمكنُنا تذكُّر هذه القاعدة باستخدام الطريقة الموضّحة في الشكل التالي:

$$+\ \begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ a' & b' & c' & a' & b' \\ a'' & b'' & c'' & a'' & b'' \end{array} \quad -\ \begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ a' & b' & c' & a' & b' \\ a'' & b'' & c'' & a'' & b'' \end{array}$$

V.5-5. تعريف: لتكن $M=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathrm{IK})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n\geq 1$ على حقل IK.
ولنعرّف أياً كانت $(i,j)\in \mathrm{IN}_n^2$ المصفوفة $M_{ij}\in \mathcal{M}_{n-1}(\mathrm{IK})$ التي نحصل عليها بحذف السطر ذي الدليل i والعمود ذي الدليل j من المصفوفة M. ولنضع

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ij}$$

نسمّي العدد A_{ij} تمام العامل a_{ij} في المصفوفة M. ونرمز بالرمز $\mathrm{com}(M)$ إلى المصفوفة المربّعة $(A_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathrm{IK})$، ونسميها تمام المصفوفة M.

V.6-5. مبرهنة: لتكن $M=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathrm{IK})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n\geq 1$ على حقل IK.
عندئذ يكون

$$M\,{}^t\mathrm{com}(M)={}^t\mathrm{com}(M)\,M=(\det M)\cdot I_n$$

الإثبات

سنحتفظ بالرموز الواردة في التعريف السابق، ولتكن $M\,{}^t\mathrm{com}(M)=(\gamma_{ij})$. عندئذ

$$\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{j+k}\det M_{jk}$$

- فإذا كان $i=j$ مثّلت العلاقة السابقة نشرَ مُحدِّد M وفق السطر ذي الدليل i. إذن يكون $\gamma_{ij}=\det M$ في هذه الحالة.
- وإذا كان $i\neq j$ مثّلت العلاقة السابقة النشرَ وفق السطر ذي الدليل i، لمحدِّد المصفوفة $\tilde{M}$ التي تنتج من M باستبدال السطر ذي الدليل i بالسطر ذي الدليل j. فيكون في هذه الحالة $\gamma_{ij}=\det\tilde{M}=0$ لأنّ للمصفوفة $\tilde{M}$ سطرين متماثلين.

نكون قد أثبتنا أنّ $M\,{}^t\mathrm{com}(M)=(\det M)\cdot I_n$، ويثبتُ القارئ بأسلوب مماثل أنّ ${}^t\mathrm{com}(M)\,M=(\det M)\cdot I_n$، فيكمُل البرهان. □

V.7-5. نتيجة: لتكن $M=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathrm{IK})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة $n\geq 1$ على حقل IK.
إذا كانت M قَلوبة، أي $M\in \mathcal{GL}_n(\mathrm{IK})$، كان

$$M^{-1}=\frac{1}{\det M}\,{}^t\mathrm{com}(M)$$

V.5-8. مثال تقليدي: لتكن $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ و $\mathbb{K}^n$ ، وليكن

$$V(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \det\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & & \xi_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{bmatrix} = \det(\xi_i^{j-1})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$$

والمطلوب هو حساب المُحدِّد $V(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ ، الذي يسمّى محدِّد VAN DER MONDE.

سنفترض فيما يلي أنّ القيم $\xi_1,\ldots,\xi_n$ مختلفة مثنى مثنى وإلاّ كانت قيمة المُحدِّد المطلوب صفراً لتساوي سطرين في المصفوفة المدروسة في تلك الحالة.

لنتأمّل كثير الحدود P من $\mathbb{K}[X]$ المُعرّف كما يلي

$$P(X) = \det\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & & \xi_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & X & X^2 & \ldots & X^{n-1} \end{bmatrix} = V(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},X)$$

من الواضح أنّ $\deg P \le n-1$ ، وأنّ $\forall k\in\mathbb{N}_{n-1},\ P(\xi_k)=0$. ينتج من ذلك أنّ

$$P(X) = \lambda\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(X-\xi_k)$$

حيث λ هي أمثال X^{n-1} في P ، فهي إذن $V(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$. ومنه

$$P(X) = V(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(X-\xi_k)$$

وهذا، حين تكون $X=\xi_n$ ، يقتضي أنّ

$$V(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},\xi_n) = V(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(\xi_n-\xi_k)$$

وتسمح العلاقة السابقة من ثَمّ أن نثبت بالتدريج

$$V(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},\xi_n) = (\xi_2-\xi_1)\cdots\prod_{k=1}^{m-1}(\xi_m-\xi_k)\cdots\prod_{k=1}^{n-2}(\xi_{n-1}-\xi_k)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(\xi_n-\xi_k)$$

أو

$$V(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(\xi_j-\xi_i)$$

V.6. جمل المعادلات الخطّية

ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديلياً، ولتكن الجماعتان $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ و $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ من $\mathbb{K}$.

تُسمّى جملة المعادلات

$$\mathcal{L}:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = \beta_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = \beta_n \end{cases}$$

جملة n معادلة خطيّة ذات p مجهولاً هي x_1، ...، x_p.

ويمكننا أن نربطَ بجملة المعادلات الخطيّة $\mathcal{L}$ جملةَ معادلات خطيّة أخرى $\mathcal{H}$ نسمّيها جملة المعادلات الخطيّة المتجانسة الموافقة لـ $\mathcal{L}$، وهي

$$\mathcal{H}:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

وإذا رمزنا بالرمز $B_{\mathcal{L}}$ إلى الشعاع $^t[\beta_1,\ldots,\beta_n] \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ ورمزنا، حين يكون $j \in \mathbb{N}_p$، بالرمز C_j إلى الشعاع $^t[a_{1j},\ldots,a_{nj}] \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$، كُتبتْ جملة المعادلات الخطيّة $\mathcal{L}$ بالشكل المُكافئ التالي، والذي يسمّي الشكل الشعاعيّ للجملة الخطيّة $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}_1 : x_1\cdot C_1 + x_2\cdot C_2 + \cdots + x_p\cdot C_p = B_{\mathcal{L}}$$

وكذلك إذا رمزنا بالرمز X إلى الشعاع المجهول $^t[x_1,\ldots,x_p] \in \mathcal{M}_{p\times1}(\mathbb{K})$، و بالرمز $A_{\mathcal{L}}$ إلى المصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ التي أعمدتها هي $C_1, C_2, \ldots, C_p$، كُتبتْ جملة المعادلات الخطيّة $\mathcal{L}$ بالشكل المُكافئ التالي، والذي يسمّي الشكل المصفوفيّ للجملة الخطيّة $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}_2 : A_{\mathcal{L}}\, X = B_{\mathcal{L}}$$

وأخيراً إذا رمزنا بالرمز $u_{\mathcal{L}}$ إلى التطبيق الخطّي

$$u_{\mathcal{L}} : \mathcal{M}_{p\times1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K}),\ Y \mapsto A_{\mathcal{L}}\, Y$$

كُتبتْ جملة المعادلات الخطيّة $\mathcal{L}$ بالشكل المُكافئ التالي، والذي يسمّي الشكل الهندسيّ للجملة الخطيّة $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}_3 : u_{\mathcal{L}}(X) = B_{\mathcal{L}}$$

لّما كانت رتبة التطبيق الخطّي $u_{\mathcal{L}}$ هي نفسها رتبة المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$، وهي كذلك تساوي رتبة جملة الأشعّة $C_1, C_2, \ldots, C_p$. كان بالإمكان أن نضع التعريف التالي:

V.6-1. تعريف: نسمّي رتبة جملة المعادلات الخطّية $\mathcal{L}$، أياً من الأعداد المتساوية التالية: رتبة التطبيق الخطّي $u_{\mathcal{L}}$، أو رتبة المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$، أو رتبة جملة الأشعّة $C_1, C_2, \ldots, C_p$. ونرمز إلى هذه الرتبة بالرمز $\operatorname{rg}\mathcal{L}$.

V.6-2. مبرهنة: سنحتفظ بالرموز والتعاريف السابقة، عندئذ

1. إذا كان $\operatorname{rg}\mathcal{L} = n = p$، قَبِلتْ جملة المعادلات الخطيّة $\mathcal{L}$ (التي تسمّى في هذه الحالة جملة كرامر Cramer) حلاً، وحلاً وحيداً فقط.
2. إذا رمزنا بالرمز $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ إلى مجموعة حلول الجملة المتجانسة $\mathcal{H}$، كان $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ فضاء شعاعياً جزئياً من $\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K})$ بُعده يساوي $p - \operatorname{rg}\mathcal{L}$.
3. تقبل الجملة $\mathcal{L}$ حلاً، إذا وفقط إذا انتمى الشعاع $B_{\mathcal{L}}$ إلى صورة التطبيق الخطيّ $u_{\mathcal{L}}$، أي كان $B_{\mathcal{L}} \in \operatorname{Im} u_{\mathcal{L}}$. وفي هذه الحالة، إذا كان X_0 حلاً ما للجملة $\mathcal{L}$، وكانت $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ هي مجموعة حلول الجملة $\mathcal{L}$، كان

$$\mathcal{S}(\mathcal{L}) = \{ X_0 + X : X \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \} = X_0 + \mathcal{S}(\mathcal{H})$$

الإثبات

إنّ الإثبات بسيط جداً ومتروك تمريناً للقارئ. □

V.6-3. تعريف: نقول عن جملتي معادلات خطّية $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}'$ إنهما متكافئتان، إذا وفقط إذا كان لهما مجموعة الحلول نفسها، أي $\mathcal{S}(\mathcal{L}) = \mathcal{S}(\mathcal{L}')$.

تقوم الدراسة العملية لجملة معادلات خطيّة $\mathcal{L}$ على إخضاع هذه الجملة لعمليات أوّلية بهدف تحويلها إلى جملة مُكافئة $\tilde{\mathcal{L}}$، تكون أبسط وأسهل معالجة.

لنتأملْ من جديد الجملة $\mathcal{L}$ ، ولنرمز بالرمز $\mathcal{L}_i$ إلى المعادلة ذات الرقم i ، وأخيراً لنذكّر بالرمز $(E_{ij})_{(i,j)\in \mathbb{N}_n^2}$ للدلالة على الأساس القانوني في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نســمّي عمليّة أوّلية أحد التحويلات التالية:

❖ المُبادلة بين المعادلتين $\mathcal{L}_i$ و $\mathcal{L}_j$ ، تُكافئ هذه العمليّة ضرب كلٍ من المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$ والشعاع $B_{\mathcal{L}}$ من اليسار بالمصفوفة P_{ij} التالية:

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

(حيث يقع العمودان i و j كما هو مؤشَّر بالسهمين في أعلى المصفوفة.)

والجملة التي نحصل عليها بعد إجراء هذه العمليّة تُكافئ الأولى لأنّ المصفوفة P_{ij} قَلوبة.

❖ استبدال $\mathcal{L}_i + \lambda\cdot\mathcal{L}_j$ بالمعادلة $\mathcal{L}_i$ حيث $\lambda \in \mathbb{K}$ ، و $i \neq j$ ، تُكافئ هــذه العمليّة ضرب كلٍ من المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$ والشعاع $B_{\mathcal{L}}$ من اليسار بالمصفوفة القلوبة $I_n + \lambda E_{ij}$:

$$I_n + \lambda E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

(حيث يقع λ في العمود j.)

❖ استبدال $\lambda\cdot\mathcal{L}_i$ بالمعادلة $\mathcal{L}_i$ حيث $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ، تُكافئ هــذه العمليّة ضرب كلٍ من المصفوفة $A_{\mathcal{L}}$ والشعاع $B_{\mathcal{L}}$ من اليسار بالمصفوفة القلوبة $I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$:

$$I_n + (\lambda - 1)E_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

(حيث يقع λ في العمود i.)

يسمح الاختيار المناسب لهذه العمليات الأوّلية بتحويل الجملة الخطيّة $\mathcal{L}$ إلى جملة مُكافئة

$$\widetilde{\mathcal{L}} : \widetilde{A}\,X = \widetilde{B}$$

حيث يكون للمصفوفة $\widetilde{A}$ الشكل التالي

$$\widetilde{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \cdots & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \times & \times & \cdots & \times \\ & & \ddots & \times & \cdots & \times \\ & & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{r} = (\widetilde{a}_{ij})$$

مع الشرط $\widetilde{a}_{11} \cdot \widetilde{a}_{22} \cdots \widetilde{a}_{rr} \neq 0$، وللشعاع $\widetilde{B}$ الشكل $^{t}[\widetilde{b}_1,\dots,\widetilde{b}_r,\dots,\widetilde{b}_n]$.

وهنا نناقش الحالات التالية:

1. حالة $n = r < p$. فتكون الجملة حَلولة، وبالسماح لـ $x_{r+1},\dots,x_p$ بأخذ قيم اختياريّة نحصل على جملة كرامر، مثلّثية سهلة الحل، وتعطي $x_1,\dots,x_r$ بدلالة $x_{r+1},\dots,x_p$.
2. حالة $n = r = p$. فتكون الجملة جملة كرامر، مثلّثية سهلة الحل.
3. حالة $n > r$، و $^{t}[\widetilde{b}_{r+1},\dots,\widetilde{b}_n] \neq 0$. لا تقبل الجملة في هذه الحالة حلولاً.
4. حالة $n > r$، و $^{t}[\widetilde{b}_{r+1},\dots,\widetilde{b}_n] = 0$. الجملة حَلولة، وتؤول الجملة في هذه الحالة إلى الحالة الأولى.

V.6-4. مثال: حلّ الجملة الخطيّة التالية

$$\mathcal{L} : \begin{cases} L_1 & : & & & y & + & z & = & 5 \\ L_2 & : & 2x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ L_3 & : & 3x & + & y & - & z & = & 4 \end{cases}$$

لتسهيل عرض الحل سنقوم بتمثيل التحويلات الأوّلية ببساطة، كما في الشكل الآتي، حيث وضعنا في العمود الأوّل أمثال x، وفي العمود الثاني أمثال y، ووضعنا أمثال z في العمود الثالث، وأخيراً وضعنا الطرف الثاني في العمود الرابع. إنّ جميع الجمل الخطيّة الممثلة فيما يلي متكافئة:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 2 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 3 & 1 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 3 & 1 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -\frac{19}{2} & -4 & \vdots & -\frac{19}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \vdots & -7 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -\frac{2}{7}L_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

إذن تُكافئ الجملة الخطّية $\mathcal{L}$ الجملةَ

$$\widetilde{\mathcal{L}} : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

وهي تبيّن مباشرة الحلّ المطلوب.

5-6.V. ملاحظة هامّة: إذا أردنا حل عددٍ من الجمل الخطّية

$$\mathcal{L}_i : A\,X_i = B_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

لها جميعاً المصفوفة A نفسها، فمن الأفضل والأسرع إجراء العمليات الأوّلية على الأشعّة $B_k, B_{k-1}, \ldots, B_1$ في آن واحد مع المصفوفة A.

لنأخذ مثلاً حالة مصفوفة قَلوبة A ذ $M_n(\mathbb{K})$، وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ الأساس القانوني للفضاء $M_{n,1}(\mathbb{K})$. إنّ أعمدة المصفوفة A^{-1} هي $(A^{-1}e_1, \ldots, A^{-1}e_n)$، وللحصول على الشعاع $C_j = A^{-1}e_j$، يجب حلّ الجملة الخطّية $\mathcal{L}_j : A\,X = e_j$. إذن لحساب A^{-1} نقوم بحلّ n جملة خطّية:

$$\mathcal{L}_i : A\,X_i = e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

سنبيّن في المثال التالي طريقة تنظيم العمليات المذكورة فيما سبق لحساب مقلوب مصفوفة:

V.6-6. مثال: لنحسب مقلوب المصفوفة $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$. يجب إذن أن نحل الجمل الخطية الثلاث التالية: $AX=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ و $AX=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ و $AX=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ لنحصل على أعمدة A^{-1}.

سنقوم فيما يلي بتمثيل هذه الجمل الثلاث في مصفوفة واحدة وبإجراء العمليات الأوليّة عليها:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{3}{2}L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -4 & 0 & -\frac{3}{2} & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+\frac{1}{2}L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3\leftarrow -\frac{2}{7}L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow L_2-L_3\\ L_1\leftarrow L_1-2L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1\leftarrow L_1-L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1\leftarrow \frac{1}{2}L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{array}\right]$$

ونستنتج إذن أنّ : $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 8 & -3 & 2\\ -1 & 3 & -2\end{bmatrix}$.

تمرينات

التمرين 1. احسب المحدّدين التاليين :

$$\det\begin{bmatrix}1&1&3&4\\2&0&0&8\\3&0&0&2\\4&4&7&5\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \det\begin{bmatrix}2&1&4&3&5\\3&4&0&5&0\\3&4&5&2&1\\1&5&2&4&3\\4&6&0&7&0\end{bmatrix}$$

التمرين 2. احسب محدّد المصفوفة $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة بالعلاقة $a_{ij}=|i-j|$.

التمرين 3. لتكن $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرّفة كما يلي:

$$a_{ij}=\begin{cases}a & : \ i>j,\\ b & : \ i<j,\\ x_i & : \ i=j.\end{cases}$$

حيث $(x_1,\dots,x_n,a,b)\in\mathbb{R}^{n+2}$. احسب $\det A$ بفرض $a\neq b$ ثم ادرس حالة $a=b$.(يمكن دراسة التابع $x\mapsto\det A_x$ حيث A_x هي المصفوفة التي نحصل عليها بجمع x إلى جميع ثوابت A، والاستعانة بالتابع $(t\mapsto f(t)=\prod_{1\le k\le n}(t-x_k)$.

التمرين 4. لتكن $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرّفة بالعلاقة $a_{ij}=S_{i\wedge j}$، حيث S_1 و S_2 و... و S_n أعداد من $\mathbb{R}$، و $\min(i,j)=i\wedge j$. احسب $\det A$. وطبّق ذلك في حالة $S_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

التمرين 5. لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نعرّف $P\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ بأنّها المصفوفة

$$P=\left[\begin{array}{c|c}A&B\\\hline B&A\end{array}\right]$$

أثبت أن : $\det P=\det(A+B)\det(A-B)$.

التمرين 6.لتكن $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرّفة، أياً كان $\theta\in\mathbb{R}$، كما يلي:

$$a_{ij}=\begin{cases}2\cos\theta & : \ i=j,\\ 1 & : \ |i-j|=1,\\ 0 & : \ |i-j|>1.\end{cases}$$

احسب $\det A_n$.

التمرين 7. لتكن $1 \le n$، ولتكن $(a_1,\dots,a_n)$ من $\mathbb{K}^n$ و $(b_1,\dots,b_n)$ من $\mathbb{K}^n$. نفترض أن $\forall(i,j)\in \mathbb{N}_n^2, a_i+b_j\neq 0$.

نسمي مصفوفة Cauchy المتعلّقة بـ $(a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_n)$ تلك المصفوفة $(\alpha_{ij}) = C(a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_n)$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ المعرّفة بالعلاقة $\alpha_{ij} = \dfrac{1}{a_i+b_j}$.

احسب المحدّد $\det C(a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_n) = c(a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_n)$. ثمّ ادرس حالة مصفوفة Hilbert: $\mathcal{H}_n$ الموافقة للحالة الخاصة $a_k = b_k = k-1/2$.

التمرين 8. ادرس تبعاً لقيم الوسطاء a,b,m الجمل الخطيّة التالية:

$$\begin{cases} x + y + z = m+1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}، \quad \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a+1)x + 3y + az = a+4 \\ 4(a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z = 2a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z = a-1 \end{cases}$$

التمرين 9. ادرس تبعاً لقيم الوسيطين λ و μ الجملة الخطيّة التالية:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu^2 \\ x + y + z + \lambda t = \mu^3 \end{cases}$$

التمرين 10. احسب مقلوب كلٍ من المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}، \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 15 & 23 \\ 6 & 15 & 46 & 73 \\ 8 & 23 & 73 & 130 \end{bmatrix}،$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}، \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 190 & 210 & 231 & 253 \\ 1140 & 1330 & 1540 & 1771 \end{bmatrix}$$

التمرين 11. أثبت أنّ المصفوفة التالية قَلوبة، أياً كانت n و $\mathbb{N}^*$:

$$A_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2n)!} \end{bmatrix}$$

التمرين 12. لتكن المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4.1 \\ 18 \end{bmatrix},$$

أوجد حلول الجملتين الخطيتين $AX_1 = b_1$ و $AX_2 = b_2$. ماذا تلاحظ؟

التمرين 13. لتكن X و Y مصفوفتين من $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

1. أوجد شرطاً لازماً و كافياً على $\gamma = {}^tY \cdot X$ حتى تكون المصفوفة $I_n + X \cdot {}^tY$ قَلوبَة، واحسب مقلوبها في هذه الحالة.
2. لتكن M مصفوفة قَلوبَة من $M_n(\mathbb{R})$ ، نضع $N = M + X \cdot {}^tY$. أوجد شرطاً لازماً وكافياً على العدد ${}^tY \cdot M^{-1} \cdot X$ حتى تكون المصفوفة N قَلوبَة، و احسب مقلوبها N^{-1} في هذه الحالة.
3. لنضع

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad N = \begin{bmatrix} 2.01 & 3 & 5.99 & 1.98 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

احسب M^{-1} ، واستنتج N^{-1} . كيف يجب تغيير الثابت $a_{24} = 1$ في M حتى تصبح المصفوفة M غير قَلوبَة ؟

التمرين 14. لتكن المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0&2\\6&6&1&7\\2&16&6&9\\2&4&8&22\end{bmatrix}$$

1. أوجد مصفوفة مثلّثية عليا U، وأخرى مثلثية سفلى L عناصرها القطرية تساوي 1، بحيث $A=L\cdot U$.
2. أوجد مقلوب كلٍ من U و L، ثم استنتج A^{-1}.

التمرين 15. لتكن المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&4\\-1&5&0&-4\\2&0&6&10\\4&-4&10&29\end{bmatrix}$$

1. أثبت أنه توجد مصفوفة مثلثية سفلى S عناصرها القطرية موجبة تماماً، بحيث $A=S\cdot{}^tS$.
2. أوجد مقلوبَ S، ثم استنتج A^{-1}.

التمرين 16. لتكن $2\le n$ و $(a_1,\ldots,a_n)$ في $\mathbb{R}^n$ و $(b_1,\ldots,b_n)$ في $\mathbb{R}^n$. نفترض أن الأعداد $a_1,\ldots,a_n$ مختلفة مثنى مثنى وكذلك أن الأعداد $b_1,\ldots,b_n$ مختلفة مثنى مثنى، وأخيراً أن $\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2, a_i+b_j\neq 0$. لتكن $(y_1,\ldots,y_n)$ في $\mathbb{R}^n$، أوجد حل الجملة الخطية

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{a_i+b_j}=y_i,\qquad i\in\mathbb{N}_n$$

يمكن لتحقيق ذلك استخدام التابع الكسري $F(X)=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{X+b_j}$. ثُم استنتج مقلوب مصفوفة Cauchy المتعلّقة بـــ $(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n)$ أي المصفوفة: $C(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n)=(\alpha_{ij})$ في $M_n(\mathbb{K})$ المعرّفة بـــ $\alpha_{ij}=\frac{1}{a_i+b_j}$.

وأخيراً احسب مقلوب مصفوفة Hilbert $\mathcal{H}_n$ الموافقة للحالة الخاصة $a_k=k-1/2$، و $b_k=k-1/2$.

التمرين 17. أياً كان $1 \leq m$، نضع $E_m = \mathbb{C}_{m-1}[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الثوابت العقدية التي لا تزيد درجتها عن $m-1$. و ليكن فيما يلي $(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$.

1. ليكن k عنصراً من $\mathbb{N}_{n+m}$، نعرّف العنصر e_k من $E_n \times E_m$ كما يلي:

$$e_k = \begin{cases} (X^{n-k}, 0) & : \ 1 \leq k \leq n \\ (0, X^{n+m-k}) & : \ n < k \leq n+m \end{cases}$$

أثبت أنّ الجملة $\mathcal{E} = (e_k)_{1 \leq k \leq n+m}$ أساس للفضاء $E_n \times E_m$.

2. ليكن كثيرا الحدود $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ و $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ من E_{m+1} و E_{n+1} على التوالي. نفترض أنّ $a_m \neq 0$ و $b_n \neq 0$. لنضع

$$\Phi(W) = S(X)P(X) + T(X)Q(X)$$

وذلك أياً كان $W = (S(X), T(X)) \in E_n \times E_m$

i. أثبت أنّ Φ تطبيق خطّي من $E_n \times E_m$ إلى E_{n+m}.

ii. ليكن $\Delta(X) = \gcd(P(X), Q(X))$ القاسم المشترك الأعظم لـ P و Q، ولتكن $d = \deg \Delta(X)$. نضع $P(X) = \Delta(X) P_1(X)$ و $Q(X) = \Delta(X) Q_1(X)$.

– أثبت أنّ $P_1(X)$ و $Q_1(X)$ أوليين فيما بينهما.

– أثبت أنّ $\ker \Phi = \{(-\lambda(X) Q_1(X), \lambda(X) P_1(X)) : \lambda(X) \in E_d\}$، واستنتج قيمة $\dim \ker \Phi$.

iii. ليكن الأساس $\mathcal{F} = (X^{n+m-1}, X^{n+m-2}, \ldots, X, 1)$ للفضاء E_{n+m}. اكتب $\text{mat}(\Phi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$. ثم استنتج أنّ رتبة المصفوفة $M(P,Q) \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C})$ التالية

$$M(P,Q) = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{m-1} & a_m & \ddots & & \vdots \\ \vdots & a_{m-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_m & 0 \\ a_1 & \vdots & & a_{m-1} & a_m \\ a_0 & a_1 & & & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \end{matrix}}^{n} & \overbrace{\begin{matrix} b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & b_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_n & 0 \\ b_1 & & & b_{n-1} & b_n \\ b_0 & b_1 & & & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_0 & b_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 \end{matrix}}^{m} \end{bmatrix}$$

تساوي درجة المضاعف المشترك الأصغر لكثيرَي الحدود P و Q. أي أنّ

$$\mathrm{rg}(M(P,Q)) = \deg \mathrm{lcm}(P(X),Q(X)).$$

3. نحتفظ برموز السؤال السابق ونضع $R(P,Q) = \det M(P,Q)$. أثبت أنّ P و Q أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا كان $R(P,Q) \neq 0$.

4. نسمّي مميِّز كثير حدود P العدد $D(P) = R(P,P')$. احسب $D(P)$ في الحالة الخاصّة $P(X) = X^3 + aX + b$ واستنتج شرطاً لازماً وكافياً على (a,b) حتى تقبل المعادلة $P(X) = 0$ جذراً مضاعفاً.

5. أثبت أنّ شرطاً لازماً وكافياً حتى يقبل $aX^2 + bX + c$ و $a'X^2 + b'X + c'$ جذراً مشتركاً هو

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')\cdot(bc' - cb')$$

6. نحتفظ برموز السؤال 2. أياً كان كثير الحدود $U(X)$ و العدد a في $\mathbb{C}$، نرمز بالرمز $\tau_a(U)(X)$ إلى كثير الحدود $U(X+a)$. ثم نعتبر التطبيقات الخطيّة التالية:

$$\begin{array}{llllll}
\Psi & : E_n \times E_m & \to & E_n \times E_m & : (S,T) & \mapsto (\tau_{-a}(S), \tau_{-a}(T)), \\
\Phi_1 & : E_n \times E_m & \to & E_{n+m} & : (S,T) & \mapsto S(X)\cdot\tau_{-a}(P)(X) + T(X)\cdot Q(X), \\
\Theta & : E_{n+m} & \to & E_{n+m} & : U & \mapsto \tau_a(U), \\
\Phi_2 & : E_n \times E_m & \to & E_{n+m} & : (S,T) & \mapsto S(X)\cdot P(X) + T(X)\cdot\tau_a(Q)(X).
\end{array}$$

i. أثبت أنّ $\Phi_2 = \Theta \circ \Phi_1 \circ \Psi$، واستنتج أنّ $R(P,\tau_a(Q)) = R(\tau_{-a}(P),Q)$.

ii. احسب $R(P,X)$، ثم أثبت أن $R(P,XQ) = (-1)^m P(0)\, R(P,Q)$.

iii. استخدم $i.6$ لإثبات المساواة $R(P,(X-a)Q) = (-1)^m P(a)\, R(P,Q)$.

iv. أثبت أن $R(P,\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)) = (-1)^{nm}\prod_{k=1}^{n}P(\alpha_k)$، واستنتج المساواة :

$$R\left(\prod_{k=1}^{m}(X-\beta_k),\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)\right) = (-1)^{nm}\prod_{1\le k,j\le n}(\alpha_k - \beta_j).$$

ꕥꕥꕥꕥ

الفصل السادس

اختزال التطبيقات الخطّيّة

VI.1.عموميات

VI.1-1. تعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً مختلفاً عن $\{0\}$ على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. نسمّي قيمة ذاتيّة للتطبيق الخطّي u كل عنصر $\lambda \in \mathbb{K}$ يجعل $u - \lambda \cdot I_E$ غير متباين، أي يُحقّق الشرط

$$\ker(u - \lambda \cdot I_E) \neq \{0\}$$

وإذا كانت λ قيمة ذاتيّة للتطبيق الخطّي u، أسمينا الفضاء الشعاعي الجزئي

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda \cdot I_E)$$

الفضاء الذاتي لـــ u الموافق للقيمة الذاتية λ، وأسمينا العناصر غير المعدومة في E_λ أشعة ذاتية للتطبيق الخطّي u موافقة للقيمة الذاتيّة λ.

وأخيراً نسمّي طيف التطبيق الخطّي u مجموعة قيمه الذاتيّة ونرمز إليه بالرمز $\mathrm{sp}(u)$:

$$\mathrm{sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \ker(u - \lambda \cdot I_E) \neq \{0\}\}$$

VI.1-2. مبرهنة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً مختلفاً عن $\{0\}$ على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. وأخيراً لتكن $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ جماعة من القيم الذاتية المختلفة مثنى مثنى للتطبيق الخطّي u. عندئذ يكون المجموع $\sum_{k=1}^{n} E_{\lambda_k}$ مجموعاً مباشراً.

الإثبات

لنرمز بالرمز $\mathcal{P}_n$ إلى القضية التالية:

" أياً كانت الجملة $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ المؤلّفة من n قيمة ذاتيّة مختلفة مثنى مثنى للتطبيق الخطّـي u، كان المجموع $\sum_{k=1}^{n} E_{\lambda_k}$ مجموعاً مباشراً ".

القضيّة $\mathcal{P}_1$ صحيحة وضوحاً. لنفترض جدلاً وجود عدد k تكون عنده $\mathcal{P}_k$ خاطئة، وليكن m أصغر عدد طبيعي أكبر تماماً من 1، بحيث تكون $\mathcal{P}_m$ خاطئة. عندئذ توجد جماعة منتهية $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}_m}$ من القيم الذاتيّة المختلفة مثنى مثنى لـ u، بحيث لا يكون المجموع $\sum_{k=1}^{m} E_{\lambda_k}$ مباشراً، ومن ثَمّ، لأنّ m أصغري، يمكن أن نجد عناصر $x_1, x_2, \ldots, x_m$ بحيث

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad x_k \in E_{\lambda_k} \setminus \{0\} \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{m} x_k = 0$$

ويكون من ثَمّ

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_m \cdot x_k = 0 \quad \text{و} \quad 0 = u\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right) = \sum_{k=1}^{m} u(x_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot x_k$$

وينتج من ذلك، بالطرح، أنّ

$$\sum_{k=1}^{m-1} (\lambda_m - \lambda_k) \cdot x_k = 0$$

ولكنّ المجموع $\sum_{k=1}^{m-1} E_{\lambda_k}$ مباشر استناداً إلى تعريف m، إذن

$$\forall i \in \mathbb{N}_{m-1}, \quad (\lambda_m - \lambda_i) \cdot x_i = 0$$

وهذا يقتضي أنّ $\forall i \in \mathbb{N}_{m-1}, \lambda_i = \lambda_m$، لأنّ الأشعة $x_1, \ldots, x_{m-1}$ غير معدومة، وهذا يتناقض مع كونْ القيم الذاتيّة $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}_m}$ مختلفة مثنى مثنى. نستنتج من ذلك أنّ $\mathcal{P}_n$ صحيحة أياً كانت n. □

VI.1-3. نتيجة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً مختلفاً عن $\{0\}$ على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. و ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يكون المجموع $\sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} E_\lambda$ مجموعاً مباشراً.

سنفترض في كلّ ما يأتي أنّ E فضاء شعاعيّ منتهي البعد، وبعده $1 \le n$، على حقل $\mathbb{K}$.

VI.1-4. تمهيد: ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ لا يتعلّق كثير الحدود

$$\mathbb{K}[X] \ni \det(\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) - X I_n)$$

بالأساس $\mathcal{E}$ للفضاء E.[fn]

[fn] يمكن النظر إلى المصفوفة التي نحسب محدّدها على أنّها عنصر من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$ حيث $\mathbb{K}(X)$ هو حقل الكسور بمتحوّل واحد X التي ثوابتها في $\mathbb{K}$.

الإثبات

$$\begin{array}{ccc} (E,\mathcal{E}) & \xrightarrow{\quad u \quad} & (E,\mathcal{E}) \\ I_E^{-1} \downarrow & & \uparrow I_E \\ (E,\mathcal{E}') & \xrightarrow{\quad u \quad} & (E,\mathcal{E}') \end{array}$$

ليكن $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}'$ أساسين للفضاء E ، لمّا كان المخطّط المجاور تبديلياً، نجد أنّ

$$\text{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times \text{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}') \times (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

ومن ثَمّ يكون

$$\text{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) - X\,I_n = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times (\text{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}') - X\,I_n) \times (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\begin{aligned} \det(\text{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) - X\,I_n) &= \det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \cdot \det(\text{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}') - X\,I_n) \cdot (\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1} \\ &= \det(\text{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}') - X\,I_n) \end{aligned}$$

وبذلك يكتمل الإثبات. ❑

يسمح لنا هذا التمهيد بصياغة التعريف التالي:

VI.1-5. تعريف: ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. نسمّي كثيرَ الحدود

$$\det(\text{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) - X\,I_n)$$

حيث $\mathcal{E}$ هو أساس ما للفضاء E ، كثيرَ الحدود المميِّز للتطبيق الخطّي u ، ونرمز إليه بالرمز $\mathcal{X}_u(X)$.

VI.1-6. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. إنّ القيم الذاتية للتطبيق الخطّي u هي جذور كثير الحدود المميّز $\mathcal{X}_u(X)$ لـ u ، أي

$$\text{sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \mathcal{X}_u(\lambda) = 0\}$$

VI.1-7. تعريف: ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$. نسمّي رتبة مضاعفة القيمة الذاتية λ للتطبيق الخطّي u ، رتبة مضاعفة λ كجذر لكثير الحدود $\mathcal{X}_u(X)$ ، ونرمز إليها بالرمز $m_u(\lambda)$. فيكون

$$m_u(\lambda) = k \Leftrightarrow \big((X-\lambda)^k \mid \mathcal{X}_u(X)\big) \wedge \big((X-\lambda)^{k+1} \nmid \mathcal{X}_u(X)\big)$$

لنذكّر بالرمز $C_j(B)$ الذي يدلّ على العمود ذي الدليل j في المصفوفة B و $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

ليكن $\mathcal{E}$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$، ولتكن A_0 و A_1 مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

لّما كان $\det_{\mathcal{E}}$ شكلاً n-خطياً أمكننا أن نكتب

$$\det(A_0 + A_1) = \sum_{j_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\cdots\sum_{j_n=0}^{1}\det_{\mathcal{E}}(C_1(A_{j_1}), C_1(A_{j_2}),\ldots,C_1(A_{j_n})) \qquad (*)$$

فإذا كانت J مجموعة جزئيّة من $\mathbb{N}_n$، عرّفنا المصفوفة A_J من أعمدها على النحو التالي:

$$C_j(A_J) = \begin{cases} C_j(A_1) & : \; j \in J, \\ C_j(A_0) & : \; j \notin J. \end{cases}$$

يسمح لنا هذا الرمز الجديد بكتابة العلاقة (*) بالشكل

$$\det(A_0 + A_1) = \sum_{J\subset \mathbb{N}_n} \det A_J \qquad (*')$$

فإذا استخدمنا العلاقة $(*')$ في حساب $\det(M - X I_n)$ بوضع $A_0 = -X I_n$ و $A_1 = M$ حصلنا على

$$\det(M - X I_n) = (-X)^n + \sum_{\varnothing\neq J\subset \mathbb{N}_n} (-X)^{n-\operatorname{card}(J)}\cdot \det M_{J,J}$$

حيث $M_{J,J}$ هي المصفوفة المربّعة من المرتبة $\operatorname{card}(J)$، التي نحصل عليها من M بعد حذف الأعمدة والأسطر التي لا تنتمي أدلّتها إلى J. وأخيراً نجد

$$\det(M - X I_n) = (-X)^n + \sum_{k=1}^{n}(-X)^{n-k}\sum_{J\in P_k^{(n)}}\det M_{J,J}$$

حيث $P_k^{(n)}$ هي مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_n$ التي يساوي عدد عناصر كلٍ منها k.

نكون بذلك قد أثبتنا المبرهنة الهامّة التالية:

VI.1-8. مبرهنة: لتكن M مصفوفة مربّعة من المرتبة n. عندئذ يكون

$$\det(M - X I_n) = (-X)^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\tau_k(M)\cdot X^{n-k}$$

حيث $\tau_k(M) = \sum_{J\in P_k^{(n)}}\det M_{J,J}$، و $P_k^{(n)}$ هي مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_n$ التي يساوي عدد عناصر كلٍ منها k، و $M_{J,J}$ هي المصفوفة المربّعة من المرتبة $\operatorname{card}(J)$، التي نحصل عليها من M بعد حذف الأعمدة والأسطر التي لا تنتمي أدلّتها إلى J. ونلاحظ بوجه

خاص أنّ $\det(M - X\,I_n)$ هو كثير حدود من الدرجة n، حدُّه المسيطر هو $(-1)^n X^n$ وحدُّه الثابت هو $\det M$، وحدُّه ذو الدرجة $n-1$ هو $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} M \cdot X^{n-1}$.

VI.1-9. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يكون كثير حدوده المميِّز $\mathcal{X}_u(X)$ كثير حدود من الدرجة n في $\mathbb{K}[X]$، حدُّه المسيطر هو $(-1)^n X^n$ وحدُّه الثابت هو $\det u$، وحدُّه ذو الدرجة $n-1$ هو $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} u \cdot X^{n-1}$. وبوجه خاص إذا كان $\mathbb{K}$ هو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$، كان طيف التطبيق u غير خال، أي $\operatorname{sp}(u) \neq \varnothing$.

VI.1-10. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ تتحقّق الخواص التالية:

1. إنّ للتطبيقين الخطيين u و ${}^t u$ كثير الحدود المميِّز نفسه.
2. ليكن F فضاء شعاعياً جزئياً مختلفاً عن $\{0\}$ من E، بحيث $u(F) \subset F$. ولنرمز بالرمز $v = u_{\| F}$ إلى التطبيق الخطيّ من $\mathcal{L}(F)$ الذي يُحرِّضه u على F أي $v : F \to F,\ x \mapsto u(x)$.
   عندئذ يقسم كثيرُ الحدود $\mathcal{X}_v(X)$ كثيرَ الحدود $\mathcal{X}_u(X)$.
3. ليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين مختلفين عن $\{0\}$ من E، بحيث $u(F) \subset F$ و $u(G) \subset G$. نفترض أيضاً أنّ الفضاءين F و G متتامّان، أي $E = F \oplus G$. عندئذ يكون $\mathcal{X}_u(X) = \mathcal{X}_v(X) \cdot \mathcal{X}_w(X)$ حيث $v = u_{\| F} \in \mathcal{L}(F)$ و $w = u_{\| G} \in \mathcal{L}(G)$.

الإثبات

1. ليكن $\mathcal{E}$ أساساً للفضاء الشعاعي E، وليكن $\mathcal{E}^*$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$. نعلم أنه إذا كانت $M = \operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ كانت ${}^t M = \operatorname{mat}({}^t u, \mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*)$، ومن ثَمّ
   $\mathcal{X}_u(X) = \det(M - X\,I_n) = \det({}^t M - X\,I_n) = \mathcal{X}_{{}^t u}(X)$.
2. ليكن $\mathcal{E}' = (e_1, \ldots, e_r)$ أساساً لـ F، ولنتمِّمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ لـ E. تُكتب مصفوفة u في هذا الأساس بالشكل

$$M = \operatorname{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \left[\begin{array}{c|c} P & R \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$$

حيث $P = \operatorname{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$. إذن

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_u(X) &= \det(M - X\,I_n) = \det(P - X\,I_r) \cdot \det(Q - X\,I_{n-r}) \\ &= \mathcal{X}_v(X) \cdot \det(Q - X\,I_{n-r}) \end{aligned}$$

3. ليكن $\mathcal{E}' = (e_1, \dots, e_r)$ أساساً لـ F ، وليكن $\mathcal{E}'' = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ أساساً لـ G ، عندئذ يكون $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ أساساً لـ E . وتُكتب مصفوفة u في هذا الأساس بالشكل

$$M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$$

حيث $P = \mathrm{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$ و $Q = \mathrm{mat}(w, \mathcal{E}'', \mathcal{E}'')$. إذن

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_u(X) &= \det(M - X I_n) = \det(P - X I_r) \cdot \det(Q - X I_{n-r}) \\ &= \mathcal{X}_v(X) \cdot \mathcal{X}_w(X) \end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته. □

VI.1-11 . نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. ولتكن λ قيمة ذاتيّة للتطبيق الخطّـي u . عندئذ يكون بُعد الفضاء الذاتيّ الموافق للقيمة الذاتيّة λ ، أي $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$ أصغر أو يساوي رتبة مضاعفة القيمة الذاتية λ . أي

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u), \quad 1 \le \dim E_\lambda \le m_u(\lambda)$$

الإثبات

ليكن $F = E_\lambda$ ، عندئذ يكون F فضاء شعاعياً جزئياً مختلفاً عن $\{0\}$ من E ، يُحقّق $u(F) \subset F$. ويكون أيضاً $v = u_{\|F} = \lambda I_F$. إذن $\mathcal{X}_v(X) = (\lambda - X)^{\dim F}$ وهو يقسم كثير الحدود $\mathcal{X}_u(X)$ بمقتضى المبرهنة السابقة. ولكن

$$(\lambda - X)^{\dim F} \mid \mathcal{X}_u(X) \Rightarrow \dim F \le m_u(\lambda)$$ □

VI.2 . التطبيقات الخطّية القابلة للتمثيل بمصفوفات قطريّة

VI.2-1 . مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين:

1. يوجد أساس $\mathcal{E}$ لـ E بحيث تكون المصفوفة $\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ قطريّة.
2. يقبل كثير الحدود $\mathcal{X}_u(X)$ التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$ ، ويكون بُعد الفضاء الذاتيّ الموافق لأي قيمة ذاتية لـ u مساوياً رتبة مضاعفتها.

الإثبات

.1 ⇐ .2. ليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً لـ E بحيث تكون المصفوفة $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$ قطريّة. ولنرمز بالرموز $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ إلى العناصر المختلفة في قطر المصفوفة M. ولنفترض أنّ λ_i مكرّرة m_i مرّة. عندئذ يكون لدينا، من جهة أولى،

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p}(\lambda_i - X)^{m_i}$$

ومن ثَمّ $\mathrm{sp}\,(u) = \{\lambda_p,\ldots,\lambda_1\}$.

من جهة ثانية، نلاحظ أنّ $\{ j \in \mathbb{N}_n : u(e_j) = \lambda_i e_j \}$ $m_i = \mathrm{card}$، إذن $m_i \leq \dim E_{\lambda_i}$.

وذلك أياً كانت $i \in \mathbb{N}_p$. وبالاستفادة من النتيجة VI.1-11. يكون $m_i \geq \dim E_{\lambda_i}$ أياً كان $i \in \mathbb{N}_p$. وهذا يثبتُ أنّ $\forall i \in \mathbb{N}_p, m_i = \dim E_{\lambda_i}$.

.2 ⇐ .1. نعلم، استناداً إلى الفرض، أنّ

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p}(\lambda_i - X)^{m_i}$$

حيث $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ عناصر مختلفة مثنى مثنى من $\mathbb{K}$، تُكوِّن في مجموعتها طيف التطبيق الخطّي u. وأنّ $\forall i \in \mathbb{N}_p, m_i = \dim E_{\lambda_i}$، حيث $E_{\lambda_k} = \ker(u - \lambda_k I_E)$.

بناءً على المبرهنة VI.1-2. يكون المجموع $F = \sum_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$ مجموعاً مباشراً، ومن ثَمّ

$$\dim F = \sum_{k=1}^{p}\dim E_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{p} m_k = \deg \chi_u(X) = n = \dim E$$

إذن $F = E$، أو $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$. فإذا اخترنا أساساً $\mathcal{E}_k$ لكلٍ مــن الفضاءات الجزئيّــة E_{λ_k}، وعرّفنا الأساس $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{E}_p$ للفضاء الكلّي E، كانت المصفوفة $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$ قطريّة، وكَمَلَ الإثبات. □

نستنتج من المبرهنة السابقة النتيجة المهمّة التالية:

VI.2-2. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. إذا كان u يقبل n قيمةً ذاتيّة مختلفة (نذكّر أنّ $n = \dim E$)، أي $\mathrm{card}\,(\mathrm{sp}(u)) = n$، قَبِلَ u التمثيل بمصفوفة قطريّة.

لننتقل إلى وجهة النظر المصفوفيّة.

VI.2-3. تعريف: لتكن $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نقول إنّ المصفوفة M تشابه مصفوفة قطرية إذا وفقط إذا وُجدتْ مصفوفة قَلوبة $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$، ووُجدتْ مصفوفة قطريّة $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$، بحيث

$$M = P D P^{-1}.$$

يُكافئُ ذلك قولنا إنّ التطبيق الخطّي

$$u_M : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}),\ X \mapsto M X$$

يقبل التمثيل بمصفوفة قطرية، حيث نأخذ $P = \mathrm{mat}(I_{\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$، و $\mathcal{E}$ هو الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$، و $\mathcal{V}$ هو أساس $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ المؤَلّف من الأشعة الذاتيّة لـ u_M.

VI.2-4. مثال: ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديلياً عدده المميِّز لا يساوي 2. ولنتأمّل في $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ المصفوفة

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

ولتكن الأشعّة v_1, v_2, v_3, v_4 من $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{K})$ المُعرَّفة كما يلي:

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} Mv_1 &= (a+b+c+d)\,v_1, & Mv_2 &= (a-b+c-d)\,v_2, \\ Mv_3 &= (a+b-c-d)\,v_3, & Mv_4 &= (a-b-c+d)\,v_4. \end{aligned}$$

فالأشعّة v_1, v_2, v_3, v_4 أشعّة ذاتيّة للتطبيق الخطّي u_M وهي تُكوِّن أساساً $\mathcal{V}$ للفضاء $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{K})$. وذلك لأنّ المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

قَلوبة، إذ تُحقّق $P^2 = 4I_4$.

وتكون مصفوفة u_M في الأساس $\mathcal{V}$، مصفوفة قطريّة، هي

$$D = \mathrm{mat}(u, \mathcal{V}, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} a+b+c+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b+c-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b-c-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c+d \end{bmatrix}$$

وتُحقّق

$$.\, M = P\,D\,P^{-1}$$

فالمصفوفة M تشابه مصفوفة قطريّة. ويمكننا أن نحسب $\mathcal{X}_M(X) = \mathcal{X}_D(X)$ لنجد

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_M(X) &= (a+b+c+d-X)(a-b+c-d-X)(a+b-c-d-X)(a-b-c+d-X) \\ &= (X-a)^4 - 2(b^2+c^2+d^2)(X-a)^2 - 8bcd(X-a) + (b^2-c^2-d^2)^2 - 4c^2d\end{aligned}$$

3.VI . التطبيقات الخطّية القابلة للتمثيل بمصفوفات مثلّثيّة

1-3.VI. تعريف: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. نقول إنّ التطبيق الخطّي u يقبل التمثيل بمصفوفة مثلثّية، إذا وفقط إذا وُجدَ أساس $\mathcal{E}$ للفضاء الشعاعي E بحيث تكون المصفوفة $\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ مثلثيّة.

لنلاحظ أننا لم نحدد أتكون المصفوفة $\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ مثلثيّة عليا أم مثلثيّة سفلى، ذلك لأنه إذا كان $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ وعرّفنا $\mathcal{E}' = (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$، وكانت $\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ مثلثيّة عليا (سفلى)، كانت المصفوفة $\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$ مثلثيّة سفلى (عليا).

2-3.VI. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يقبل u التمثيل بمصفوفة مثلّثيّة إذا وفقط إذا كان كثير الحدود المميِّز $\mathcal{X}_u(X)$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً لـ E بحيث تكون المصفوفة $\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (a_{ij})$ مثلّثية عليا. عندئذ يكون

$$.\, \mathcal{X}_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - X)$$

بالعكس، سنثبت بالتدريج على $\dim F = n$ ، أنّ كلّ تطبيق خطّـي من $\mathcal{L}(F)$ يقبـل كثير حدوده المميِّز التفريق إلى جداء عوامل من الدرجـة الأولى في$\mathbb{K}[X]$ ، يقبـل التمثيـل بمصفوفة مثلّثيّة.

إنّ هذه القضيّة صحيحة حين يكون $n = 1$.

لنفترض صحّة هذه القضيّة، مهما يكن الفضاء شعاعي F الذي بُعده أصغر تماماً من n.
وليكن E فضاءً شعاعياً بُعده n . وليكن $u \in \mathcal{L}(E)$ بحيث يقبل كثير الحدود المميِّز $\mathcal{X}_u(X)$ التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$.

لتكن $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ ، (إنّ $\mathrm{sp}(u) \neq \varnothing$ لأنّ $\mathcal{X}_u(X)$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$)، وليكن x شعاعاً ذاتياً لـــ u موافقاً للقيمـة الذاتيّة λ . أي إنّ x عنصر من $E_\lambda \setminus \{0\}$.

لنضع $e_1 = x$ ، ولنتمِّمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ لـــ E . وليكن $p : E \to F$ الإسقاط الخطّي لـــ E على $F = \mathrm{vect}((e_2, e_3, \ldots, e_n))$ توازياً مع $G = \mathbb{K} \cdot e_1$ ، ولنعرِّف

$$s : F \to E,\ x \mapsto x$$

ولنضع أخيراً $v = p \circ u \circ s \in \mathcal{L}(F)$. فإذا كانت $M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (m_{ij})$ كان

$$\forall j \in \{2, \ldots, n\},\quad p \circ u \circ s(e_j) = \sum_{j=2}^{n} m_{ij} \cdot e_j$$

وصار لدينا

$$\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & m_{12} \cdots m_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}') \\ 0 & \end{array}\right]$$

حيث $\mathcal{E}' = (e_2, \ldots, e_n)$ أساس لـــ F .

من جهة أولى، لدينا $\dim F < n$ و $v \in \mathcal{L}(F)$ ، ومن جهة ثانية لدينا

$$\mathcal{X}_u(X) = (\lambda - X)\mathcal{X}_v(X)$$

وهذا يقتضي أنّ $\mathcal{X}_v(X)$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في $\mathbb{K}[X]$. ينجـم عن ذلك، استناداً إلى فرْض التدريج، أنه يوجد أساس $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n)$ لـــ F بحيث تكون المصفوفة $\mathrm{mat}(v, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}})$ مثلّثية عليا. عندئذ تكون المصفوفة $\mathrm{mat}(u, \mathcal{F}, \mathcal{F})$ ، حيث $\mathcal{F}$ هـو الأساس $\mathcal{F} = (e_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n)$ لـــ E ، مثلثيّة عليا أيضاً، ويكمل الإثبات. □

نستنتج من المبرهنة السابقة النتيجة المهمّة التالية:

VI.3-3. نتيجة: ليكن E فضاءً شعاعيّاً منتهي البعد على حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$. عندئـــذ يقبل كلُّ تطبيق خطّي u من $\mathcal{L}(E)$، التمثيل بمصفوفة مثلّثيّة.

الإثبات

هذه النتيجة صحيحة لأنه في $\mathbb{C}[X]$ يقبل كلُّ كثير حدود غير ثابت التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى. □

VI.4 . كثيرات الحدود والتطبيقات الخطّية

ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$، ولتكن $k \in \mathbb{N}$. إذا كانت $k=0$ اصطلحنا أنّ $u^k = I_E$. وإذا كانت $k > 0$ عرّفنا $u^k = u \circ u^{k-1} = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ مرة}}$.

VI.4-1. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. إنّ التطبيقَ

$$\Psi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E),\ P \mapsto P(u)$$

الذي يربط بكثير الحدود $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ من $\mathbb{K}[X]$ التطبيقَ الخطّي $P(u) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k$ من $\mathcal{L}(E)$، هو تشاكلٌ بين الجبرين $\mathbb{K}[X]$ و $\mathcal{L}(E)$.

الإثبات

يجب أن نثبت الخاصّة التالية:

$$\forall(\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], \quad \forall u \in \mathcal{L}(E),$$

$$P(u) + Q(u) = (P+Q)(u)$$
$$\lambda \cdot P(u) = (\lambda P)(u)$$
$$P(u) \circ Q(u) = (P\,Q)(u)$$

وهذا تحقّقٌ مباشر نتركه تمريناً للقارئ. □

VI.4-2. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. وليكن كثيرا الحدود P و Q من $\mathbb{K}[X]$.
نفترض أنّ P و Q أوليان فيما بينهما. عندئذ يكون

$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$$

الإثبات

استناداً إلى مبرهنة Bezout نعلم أنه يوجد S و T من $\mathbb{K}[X]$ بحيث

$$SP + TQ = 1$$

وهذه المساواة تقتضي أن يكون

$$S(u) \circ P(u) + T(u) \circ Q(u) = I_E \qquad (*)$$

- لتكن x في $\ker P(u) \cap \ker Q(u)$ ، إذن بناءً على (*) يكون

$$x = S(u)\big(P(u)(x)\big) + T(u)\big(Q(u)(x)\big) = 0$$

و $\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}$.

- ومن ناحية أخرى، لتكن x في $\ker(PQ)(u)$ ، نعرّف $x_1 = T(u) \circ Q(u)(x)$ وكذلك نعرّف $x_2 = S(u) \circ P(u)(x)$. فيكون $x_1 \in \ker P(u)$ و $x_2 \in \ker Q(u)$ ، واستناداً إلى (*) يكون أيضاً $x = x_1 + x_2$. إذن $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) + \ker Q(u)$. وهذا هو المطلوب إثباته. □

VI.4-3. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. ولتكن $(P_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ كثيرات حدود أوّلية فيما بينها مثنى مثنى من $\mathbb{K}[X]$. وليكن $P = \prod_{k=1}^{m} P_k$. عندئذ يكون

$$\ker(P)(u) = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker P_k(u)$$

الإثبات

هذه النتيجة تعميم مباشر للمبرهنة السابقة، ويجري إثباتها بالتدريج على العدد m . □

VI.4-4. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. هناك تكافؤ بين القضيتين التاليتين:

1. يقبل التطبيق الخطّي u التمثيل بمصفوفة قطريّة.
2. يوجد كثير حدود P من $\mathbb{K}[X]$ يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى مختلفة مثنى مثنى، بحيث $P(u) = 0$.

الإثبات

1. $\Leftarrow$ 2. لّما كان التطبيق الخطّي u يقبل التمثيل بمصفوفة قطريّة، كان

$E = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} E_\lambda$ حيث $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$.

يكفي إذن أن نعرّف $P = \prod_{\lambda \in sp(u)} (\lambda - X)$، ونتيقّن بسهولة أنّ P يُحقّق الشرط 2.

2. $\Leftarrow$ 1. لنفترض أنّ $P = \prod_{k=1}^{m} (X - \mu_k)$ حيث تكون الأعداد $\mu_1, \dots, \mu_m$ مختلفة مثنى مثنى.

لّما كان $P(u) = 0$، ولّما كانت كثيرات الحدود $((X - \mu_k))_{k \in \mathbb{N}_m}$ أوليّة فيما بينها مثنى مثنى، كان

$$E = \ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker(u - \mu_k I_E)$$

وذلك بمقتضى النتيجة VI.4-3. لنعرّف إذن $J = \{ k \in \mathbb{N}_m : \ker(u - \mu_k I_E) \neq \{0\} \}$. فيكون

$$E = \bigoplus_{k \in J} \ker(u - \mu_k I_E)$$

يكفي أن نختار أساساً $\mathcal{E}$ لـــ E، من الشكل $\bigcup_{k \in J} \mathcal{E}_k$ حيث يكون $\mathcal{E}_k$ أساساً مـــا للفضـــاء $\ker(u - \mu_k I_E)$، حتّى تكون المصفوفة $\mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ قطريّة، ومنه 1. ❑

VI.4-5. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. ولنفترض أنّه يوجد في $\mathbb{K}[X]$ كثير حدود

$$P(X) = \prod_{k=1}^{m} (X - \mu_k)^{n_k}$$

بحيث تكون الأعداد $\mu_1, \dots, \mu_m$ مختلفة مثنى مثنى، ويكون $P(u) = 0$. عندئذ يكون

$$E = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker (u - \mu_k)^{n_k}$$

الإثبات

تنجم هذه النتيجة مباشرة عن النتيجةVI.4-3 لأن كثيرات الحدود $((X - \mu_k)^{n_k})_{k \in \mathbb{N}_m}$ أوليّة فيما بينها مثنى مثنى. ❑

VI.6-4. مبرهنة Cayley-Hamilton: ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يكون

$$\mathcal{X}_u(u) = 0$$

الإثبات

ليكن x عنصراً غير معدوم من E . لمّا كان بُعد الفضاء الشعاعي E منتهياً ويساوي n ، كانت الجملة $(x, u(x), \ldots, u^n(x))$ مرتبطة خطيّاً. يمكننا إذن أن نعرّف $p = p_x$ أصغر عدد طبيعي k يجعل الجملة $(x, u(x), \ldots, u^k(x))$ مرتبطة. ونعرّف أيضاً

$$F_x = \text{vect}\left((x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))\right)$$

إنّ اختيارنا للعدد p يجعل من الجملة $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ جملة حرّة، فهي إذن أساس للفضاء الجزئي F_x ، نرمز إليه بالرمز $\mathcal{F}$. ولمّا كانت الجملة $(x, u(x), \ldots, u^p(x))$ مرتبطة، أمكننا أن نجد $(a_0, \ldots, a_{p-1})$ في $\mathbb{K}^p$ بحيث

$$u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \cdot u^k(x) \qquad (*)$$

تقتضي هذه المساواة أنّ الفضاء F_x يُحقّق الشرط $u(F_x) \subset F_x$ ، وإذا عرّفنا التطبيق الخطيّ

$$v = u_{\| F_x} : F_x \to F_x,\ y \mapsto u(y)$$

من $\mathcal{L}(F_x)$ ، صار لدينا بمقتضى المبرهنة VI.1-10 .

$$\mathcal{X}_u(X) = Q(X)\,\mathcal{X}_v(X) \qquad (\diamond)$$

ولكن

$$M_x = \text{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{bmatrix}$$

ويبيّن حسابٌ مباشر نترك تفاصيله للقارئ أنّ

$$\mathcal{X}_v(X) = \det(M_x - X\,I_p) = (-1)^p (X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k)$$

ومن ثَمّ يكون $\mathcal{X}_v(u)(x) = (-1)^p (u^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)) = 0$ استناداً إلى العلاقة (*) .

وأخيراً نجد، بناءً على ($\diamond$)، أنّ $\mathcal{X}_u(u)(x) = Q(u) \circ \mathcal{X}_v(u)(x) = 0$. ويَكمُل الإثبات بملاحظة أنّ x عنصر ما من E . □

5.VI. تطبيقات

1-5.VI. مبرهنة: لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. ولنفترض أنّه يوجد كثير حدود P في $\mathbb{C}[X]$ يُكتب بالشكل $P(X)=\prod_{k=1}^{p}(\lambda_k - X)^{n_k}$، حيث $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ أعداد مختلفة مثنى مثنى، ويُحقّق $P(A)=0$. عندئذ يكون

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad A^n = Q_n(A)$$

حيث Q_n هو كثير الحدود الوحيد من $\mathbb{C}[X]$، الذي يُحقّق الشروط:

- $\deg Q_n < \deg P$
- $\forall k \in \mathbb{N}_p,\quad \forall j \in \{0,1,\ldots,n_k - 1\},\quad (X^n)^{(j)}(\lambda_k) = (Q_n)^{(j)}(\lambda_k)$

الإثبات

لتكن $\ell = \deg P = \sum_{k=1}^{p} n_k$، ولنعرّف المجموعة

$$\Delta = \left\{(j,k) : \mathbb{N}^2 : (1 \le k \le p) \wedge (0 \le j < n_k)\right\}$$

فيكون $\operatorname{card}\Delta = \ell$.

ثُمّ لنتأمّل التطبيق الخطّي

$$\Phi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}^\Delta,\ T(X) \mapsto \left(T^{(j)}(\lambda_k)\right)_{(j,k)\in\Delta}$$

نلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned} T(X) \in \ker\Phi \;&\Leftrightarrow\; \forall (j,k) \in \Delta,\ T^{(j)}(\lambda_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{N}_p,\ (\lambda_k - X)^{n_k} \mid T(X) \\ &\Leftrightarrow\; P(X) \mid T(X) \end{aligned}$$

إذن $\ker\Phi = \{S(X)P(X) : S \in \mathbb{C}[X]\}$.

لنعرّف $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$ بأنه الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{C}[X]$ المؤلّف من كثيرات الحدود العقديّة التي درجاتها أصغر تماماً من ℓ، فيكون $\dim \mathbb{C}_{\ell-1}[X] = \ell = \operatorname{card}\Delta$. ولنتأمّل

$$\Psi = \Phi_{|\mathbb{C}_{\ell-1}[X]} : \mathbb{C}_{\ell-1}[X] \to \mathbb{C}^\Delta,\ \Psi(T) = \Phi(T)$$

لّما كان $\ker\Psi = \mathbb{C}_{\ell-1}[X] \cap \ker\Phi = \{0\}$، كان Ψ تطبيقاً خطياً متبايناً بين فضاءين شعاعيين لهما البُعد نفسه، لذا فهو تقابل خطّي. وينتج بوجه خاص أنّ Φ غامر.

نستنتج من هذه الدراسة أنّه، أياً كان n في $\mathbb{N}$، يوجد كثير حدود وحيد Q_n في $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$ بحيث $\Psi(Q_n) = \Phi(X^n)$. فشروط المبرهنة تعيّن Q_n بطريقة وحيدة.

ومن ناحيّة أخرى، يُحقّق كثير الحدود Q_n العلاقة $X^n - Q_n$ ∋ $\ker\Phi$ إذن يوجد كثير حدود S_n ∋ $\mathbb{C}[X]$، بحيث $X^n = Q_n(X) + S_n(X)P(X)$. ومنه

$$A^n = Q_n(A) + S_n(A)P(A) = Q_n(A)$$

لأنّ $P(A) = 0$. وهذا يُكملُ الإثبات. □

يمكننا أنّ نكون أكثر دقّة في صياغة المبرهنة السابقة. لنحتفظ برموز المبرهنـــة الســـابقة حيث أثبتنا أنّ

$$\Psi : \mathbb{C}_{\ell-1}[X] \to \mathbb{C}^{\Delta},\ T(X) \mapsto \left(T^{(j)}(\lambda_k)\right)_{(j,k)\in\Delta}$$

تقابل خطّي. إذن، أياً كان (j_0, k_0) ∋ Δ، يوجد كثير حدود وحيد P_{j_0,k_0} ∋ $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$ بحيـث يكون $\Psi(P_{j_0,k_0}) = \delta_{j,j_0}\delta_{k,k_0} = e_{j_0,k_0}(j,k)$، حيث $\delta_{\alpha,\beta}$ هو رمز كرونيكر المتعارف، أي

$$e_{j_0,k_0}(j,k) = \begin{cases} 1 & : \ (j_0,k_0) = (j,k) \\ 0 & : \ (j_0,k_0) \neq (j,k) \end{cases}$$

ولكنّ الجملة $(e_{j_0,k_0})_{(j_0,k_0)\in\Delta}$ هي الأساس القانوني للفضاء الشعاعي $\mathbb{C}^{\Delta}$، إذن تكون الجملة $(P_{j_0,k_0})_{(j_0,k_0)\in\Delta}$ أساساً للفضاء الشعاعي $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$.

ليكن Q ∋ $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$ إذن توجد جملة $(\beta_{j,k})_{(j,k)\in\Delta}$ من $\mathbb{C}^{\Delta}$ بحيث

$$Q = \sum_{(j,k)\in\Delta} \beta_{j,k} \cdot P_{j,k}$$

ولتعيين الثوابت $(\beta_{j,k})_{(j,k)\in\Delta}$، نحسب من العلاقة السابقة $Q^{(t)}(\lambda_s)$ حيث (t,s) ∋ Δ فنجد أنّ $Q^{(t)}(\lambda_s) = \beta_{t,s}$. إذن

$$\forall Q \in \mathbb{C}_{\ell-1}[X], \quad Q = \sum_{(j,k)\in\Delta} Q^{(j)}(\lambda_k) \cdot P_{j,k}$$

وبوجه خاص يكون $Q_n = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{U}_{j,k}(n) P_{j,k}$، حيث $\mathcal{U}_{j,k}(n) = (X^n)^{(j)}\big|_{X=\lambda_k}$، أو

$$\mathcal{U}_{j,k}(n) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-j+1)\lambda_k^{n-k} & : \ n > j \\ t! & : \ n = j \\ 0 & : \ n < j \end{cases}$$

وأخيراً نجد

$$\forall n \geq 0, \quad A^n = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{U}_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A) \qquad (\triangledown)$$

حيث توضّح العلاقة الهامّة $(\triangledown)$ تبعيّة A^n لـــ n .

VI.5-2. نتيجة[P]: لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. وليكن $\rho(A)$ نصف القطر الطيفيّ للمصفوفة A، أي $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$. وليكن $\|\cdot\|$ نظيماً ما على الفضاء الشعاعيّ $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. عندئذ يوجد ثابت K موجب تماماً بحيث يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m \Rightarrow \|A^n\| \leq K n^{m-1} (\rho(A))^{n-m+1}$$

الإثبات

ليكن $P = \chi_A \in \mathbb{C}[X]$ كثير الحدود المميّز للمصفوفة A. فهو يُكتب بالشكل

$$P(X) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{n_k}$$

حيث $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ أعداد مختلفة مثنى مثنى تُكوِّن طيف A، ويكون $P(A) = 0$. استناداً إلى المبرهنة VI.4-6. ويكون من ثَمّ

$$\forall n \geq m, \quad A^n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k-1} n(n-1)\cdots(n-j+1) \cdot \lambda_k^{n-j} P_{j,k}(A)$$

وذلك باستخدام رموز المبرهنة السابقة. إذن، أياً كانت $0 < n$، فإنّ

$$\|A^n\| \leq \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k-1} n(n-1)\cdots(n-j+1) \cdot (\rho(A))^{n-j} \|P_{j,k}(A)\|$$

$$\leq n^{m-1} \cdot (\rho(A))^{n-m+1} \cdot \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k-1} (\rho(A))^{m-1-j} \|P_{j,k}(A)\|$$

وهو المطلوب إثباته، حيث $K = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k-1} (\rho(A))^{m-1-j} \|P_{j,k}(A)\|$. □

VI.5-3. نتيجة[P]: لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. وليكن $\rho(A)$ نصف القطر الطيفيّ للمصفوفة A، أي $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$. عندئذ تكون الخواص التالية متكافئة

1. إنّ $\rho(A) < 1$.
2. إنّ المتتالية $(A^n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو 0 في $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.
3. إنّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ متقاربة في $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.

[P] نفترض أنّ القارئ على دراية بالفضاءات الشعاعيّة المنظّمة، راجع كتاب التحليل ٢.

VI.4-5. مبرهنة: ليكن $(a_0,a_1,\ldots,a_{m-1})$ في $\mathbb{C}^m$. حيث $1 \le m$، و $a_0 \neq 0$. إنّ الفضاء الشعاعيّ الجزئي من $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ المعرّف كما يلي

$$\mathscr{E} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \ge m, \quad u_n = a_{m-1}u_{n-1} + \cdots + a_1 u_{n-m+1} + a_0 u_{n-m}\right\}$$

هو فضاء شعاعيّ بُعده m. وإذا كان

$$X^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k = \prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{n_k}$$

حيث $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ أعداد مختلفة مثنى مثنى، كوّنت الجملة $(\mathcal{U}_{t,s})_{(t,s)\in\Delta}$ حيث

$$\Delta = \left\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 : (0 \le j < n_k) \wedge (1 \le k \le p)\right\}$$

و

$$\mathcal{U}_{t,s}(n) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-t+1)\lambda_s^{n-t} & : \; n > t \\ t! & : \; n = t \\ 0 & : \; n < t \end{cases}$$

أساساً للفضاء $\mathscr{E}$.

الإثبات

لنثبت أوّلاً أن $\mathcal{U}_{t,s}$ في $\mathscr{E}$ وذلك أياً كانت (t,s) في Δ. في الحقيقة، نلاحظ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{U}_{(t,s)}(n) = (X^n)^{(t)}\Big|_{X=\lambda_s}$$

ومنه، أياً كانت $m \le n$، نجد

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} a_{m-k}\mathcal{U}_{t,s}(n-k) &= \sum_{k=1}^{m} a_{m-k}(X^{n-k})^{(t)}\Big|_{X=\lambda_s} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{m-k}X^{n-k}\right)^{(t)}\Bigg|_{X=\lambda_s} \\ &= \left(X^{n-m}\sum_{k=1}^{m} a_{m-k}X^{m-k}\right)^{(t)}\Bigg|_{X=\lambda_s} \\ &= \left(X^{n-m}\left(X^m - \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{n_k}\right)\right)^{(t)}\Bigg|_{X=\lambda_s} \\ &= \left(X^n - X^{n-m}\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{n_k}\right)^{(t)}\Bigg|_{X=\lambda_s} = (X^n)^{(t)}\Big|_{X=\lambda_s} = \mathcal{U}_{t,s}(n)\end{aligned}$$

إذن الجملة $(\mathcal{U}_{t,s})_{(t,s)\in\Delta}$ هي جملة من عناصر $\mathscr{E}$.

من ناحية أخرى نرى بسهولة أنّ التطبيق الخطّي

$$\Theta : E \to \mathbb{C}^m,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$$

تقابل، ومن ثَمّ يكون $\dim \mathscr{E} = m = \operatorname{card} \Delta$. يكفي إذن حتى يتمّ المطلوب أن نثبت أنّ الجملة $(\mathcal{U}_{t,s})_{(t,s)\in\Delta}$ تولّد الفضاء الشعاعي $\mathscr{E}$.

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ في $\mathscr{E}$، ولنعرّف الشعاع $Z_n = \begin{bmatrix} u_{n-m} \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$ من $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ حين تكون $n \geq m$. فنلاحظ أنّ $Z_{n+1} = A\,Z_n$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{m-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$$

ومنه، يكون $Z_{n+m} = A^n Z_m \quad \forall n \geq 0,$.

ولكن بنشر المُحدد $\chi_A(X)$ وفق العمود الأوّل وبالتدريج على مرتبة هذا المحدّد نجد

$$\chi_A(X) = (-1)^m \left(X^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \right) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{n_k}$$

وإذا استخدمنا العلاقة (∇) بعد ملاحظة أنّ $\chi_A(A) = 0$ وجدنا

$$\forall n \geq 0, \quad A^n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k - 1} \mathcal{U}_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A)$$

ومن ثّمّ

$$\forall n \geq 0, \quad Z_{n+m} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k - 1} \mathcal{U}_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A) Z_m$$

ولّما كانت u_n هي المركّبة الأولى للشعاع Z_{n+m} ، أمكننا بوضع $\beta_{j,k}$ للدلالة على المركّبة الأولى للشعاع $P_{j,k}(A)Z_m$ أن نكتب

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n_k - 1} \beta_{j,k} \cdot \mathcal{U}_{j,k}(n)$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ الجملة $(\mathcal{U}_{t,s})_{(t,s)\in\Delta}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathscr{E}$. ❑

VI.5-5. مثال: لندرس المتتاليات $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقات :

$$\begin{aligned} 2x_{n+1} &= 5x_n - 5y_n + 2z_n \\ 2y_{n+1} &= 5x_n - 6y_n + 3z_n \\ 2z_{n+1} &= 6x_n - 9y_n + 5z_n \end{aligned}$$

في الحقيقة، إذا عرّفنا $T_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{C})$ و $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$، وجدنا أنّ العلاقات التدريجيّة التي تعرّف المتتاليات $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُكافئ $T_{n+1} = AT_n$ وذلك أياً كانت $0 \le n$. ومن ثَمّ

$$\forall n \ge 0, \quad T_n = A^n \cdot T_0$$

تؤول المسألة إذن إلى حساب A^n، لهذا علينا إيجاد كثير حدود P يُحقّق $P(A) = 0$، والمرشّح الوحيد أمامنا هو χ_A كثير الحدود المميّز للمصفوفة A. ونجد بالحساب المباشر

$$\chi_A(X) = -X^3 + 2X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} = (X-1)(X-\frac{1}{2})^2$$

لنبحث إذن عن كثير الحدود الوحيد $Q_n(X)$ الذي درجته أصغر أو تساوي 2 ويُحقّق

$$Q_n(1) = 1, \quad Q_n(\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2})^n, \quad Q_n'(\tfrac{1}{2}) = n(\tfrac{1}{2})^{n-1},$$

فنجد بالحل

$$Q_n(X) = (1-(n+1)2^{-n})(2X-1)^2 + n2^{-n}(2X-1) + 2^{-n}$$

ولكن

$$2A - I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}, \quad (2A-I_3)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

إذن بالتعويض فيما سبق وباستخدام $A^n = Q_n(A)$ نجد

$$A^n = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \frac{n}{2^n}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2^n}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون، أياً كانت n في $\mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} x_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(2x_0 - 3y_0 + z_0) + n2^{-n}(x_0 - 2y_0 + z_0) \\ y_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(3x_0 - 4y_0 + z_0) + n2^{-n}(2x_0 - 4y_0 + 2z_0) \\ z_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(3x_0 - 3y_0) + n2^{-n}(3x_0 - 6y_0 + 3z_0) \end{aligned}$$

ونلاحظ بوجه خاص أنّ المتتاليات الثلاث $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو النهاية نفسها، وهي $3x_0 - 3y_0 + z_0$.

تمرينات

التمرين 1. احسب كثير الحدود المميّز لكل من المصفوفات التالية:

$$M=\begin{bmatrix}0&b&\cdots&b\\a&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&0&b\\a&\cdots&a&0\end{bmatrix},\qquad M=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&a_n\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&a_2\\a_n&\cdots&a_2&a_1^2\end{bmatrix},$$

$$M=\begin{bmatrix}a^2&ab&ab&b^2\\ab&a^2&b^2&ab\\ab&b^2&a^2&ab\\b^2&ab&ab&a^2\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix}3&-5&2&-6\\0&5&0&4\\-2&7&-1&11\\0&-4&0&-3\end{bmatrix}.$$

التمرين 2. لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{bmatrix}$. عيّن القيم الذاتية والأشعة الذاتية لـــ A .

هل تشابه المصفوفة A مصفوفةً قطرية؟ احسب A^n حين يكون n في $\mathbb{N}$.

التمرين 3. أثبت تشابه المصفوفتين التاليتين:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

التمرين 4. ادرس اختزال المصفوفات التالية ،أي بيّن إذا كانت تُشابه مصفوفات قطريـــة وفي حال الإيجاب عيّن مصفوفة الانتقال والمصفوفة القطرية الموافقة.

- المصفوفة $A=(a_{ij})$ في $M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i,j)\in \mathbb{N}_n^2,\ a_{ij}=\alpha_i .$$

- المصفوفة $B=(b_{ij})$ في $M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i,j)\in \mathbb{N}_n^2,\ b_{ij}=\begin{cases}1 & : & i+j=n+1\\0 & : & i+j\neq n+1\end{cases}.$$

- المصفوفة $C=(c_{ij})$ في $M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i,j)\in \mathbb{N}_n^2,\ c_{ij}=\begin{cases}c_i & : & i+j=n+1\\0 & : & i+j\neq n+1\end{cases}.$$ مع c_i في $\mathbb{R}_+^*$.

- المصفوفة $D = (d_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، حيث

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2,\ d_{ij} = \begin{cases} 1 & : & (i-1)(j-1)(i-j) = 0 \\ 0 & : & (i-1)(j-1)(i-j) \neq 0 \end{cases}.$$

التمرين 5. حقل الدراسة هو $\mathbb{C}$. أوجد مصفوفة قطرية مشابهة للمصفوفة M في كـــلٍ مـــن الحالات التالية، واحسب M^n أياً كانت $n \in \mathbb{N}$.

$$1^\circ.\quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad 2^\circ.\quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$3^\circ.\quad M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\quad 4^\circ.\quad M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

التمرين 6. لتكن M مصفوفة مربعة من المرتبة n على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أن المصفوفة M تُكتب بالشكل $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$، حـــيث $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$، $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$، $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$ و $C \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$، مع $p + q = n$.

1. أثبت أنه إذا كانت A قَلوبة فإنّ $\det M = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$.
2. أثبت أنه إذا كانت D قَلوبة فإنّ $\det M = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C)$.
3. ليكن $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ حيث $n \geq p \geq 1$. ولتكن $A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ و $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. أثبت أنّ

$$\det(XI_n + AB) = X^{n-p} \det(XI_p + BA)$$

<u>تطبيق</u> – ليكن $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}))^2$، نضع $M = X \cdot {}^tY + Y \cdot {}^tX$. عيّن كثير الحدود المميّز لـــ M. وادرس الحالة الخاصة $M = (\cos(j-i)\theta)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$.

– لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، و $B = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. أثبت أنّ $\mathcal{X}_B(X) = (-1)^n \mathcal{X}_A(X^2)$.

التمرين 7. لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$. نتأمّل التطبيق الخطّي Φ من $\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ المعـــرف بـــ $\Phi(M)=AM-MA$ حين يكون M من $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. عيّن نواة Φ وأثبت أنه قـــابل للتمثيل بمصفوفة قطرية.

التمرين 8. ليكن E فضاء التوابع المستمرة على $[0,1]$ والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$. وليكن التطبيق الخطيّ $u:E\to E: f\mapsto u(f)$ المعرف بالعلاقة

$$u(f)(x)=\int_0^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

عيّن القيم والأشعة الذاتية لـــ u.

التمرين 9. ليكن a و b عددين حقيقيين مختلفين. وليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضـــاء كثـــيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن n. عيّن القيم الذاتية والأشعة الذاتية للتطبيق u من $\mathcal{L}(E)$ حيث

$$u(P)(X)=(X-a)(X-b)P'(X)-(nX-\frac{n}{2}(a+b))P(X).$$

التمرين 10. لتكن a و b و c أعداداً حقيقية مختلفة مثنى مثنى. وليكـــن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن n. ادرس قابلية تمثيل التطبيق u من $\mathcal{L}(E)$ بمصفوفة قطرية، حيث

$$u(P)(X)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\big((aX+b)P(X)\big)+cP(X).$$

التمرين 11. لتكن A و M مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ تحققان $AM=MA$. نفترض أنّ القيـــم الذاتية لـــ M متباينة مثنى مثنى.

1. أثبت أنّ كل شعاع ذاتيّ لـــ M هو شعاع ذاتيّ لـــ A.
2. أثبت أنّه يوجد $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ من $\mathbb{C}^n$ بحيث

$$A=\alpha_0 I_n+\alpha_1 M+\cdots+\alpha_{n-1}M^{n-1}.$$

3. حلّ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ المعادلة $X^2=A$ حيث $A=\begin{bmatrix}11 & -5 & 5\\ -5 & 3 & -3\\ 5 & -3 & 3\end{bmatrix}$.

التمرين 12. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. نفترض وجود عددين (λ,μ) في $\mathbb{C}^2$ و مصفوفتين (A,B) في $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ بحيث يكون $M^k=\lambda^k A+\mu^k B$ أياً كانت k في $\{1,2,3\}$. أثبت أنّ M تُشابه مصفوفة قطرية.

التمرين 13. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، $(1\leq n)$. أثبت تكافؤ الخواص التالية:

- كثير الحدود المميّز لـ M يحقق $\mathcal{X}_M(X)=(-1)^n X^n$.
- أياً كان $0<k$ فإنّ $\operatorname{tr}(M^k)=0$.
- يوجد عدد طبيعي p بحيث $M^p=0$.

التمرين 14. نقول عن مصفوفة $A=(a_{ij})$ في $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ إنها إحصائية إذا وفقط إذا تحقق

$$\forall i\in\mathbb{N}_n,\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1 \quad \text{و} \quad \forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\ a_{ij}\in[0,1].$$

لتكن $A=(a_{ij})$ في $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة إحصائية.

1. أثبت أنّ 1 قيمة ذاتية للمصفوفة A.
2. لتكن λ قيمة ذاتية لـ A في $\mathbb{C}$. أثبت أنّ $|\lambda|\leq 1$.
3. نفترض أنّ $0<a_{ii}$ أياً كان i في $\mathbb{N}_n$. أثبت أنّ جميع القيم الذاتية لـ A (في $\mathbb{C}$) تقع داخل دائرة نصف قطرها أصغر تماماً من 1 وتمس داخلياً الدائرة المثلّثية.

التمرين 15.

ليكن كثير الحدود $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}X^k$ من الدرجة n في $\mathbb{C}[X]$. نفترض أنّ

$$P(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$$

و نضع $S_k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k$ حين يكون $k=0,1,\ldots,n$.

1. أثبت المطابقة: $\dfrac{P'(X)}{P(X)}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{S_k}{X^{k+1}}+\dfrac{1}{X^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i^{n+1}}{X-\lambda_i}$.
2. استنتج أنه في جوار لـ $+\infty$ لدينا $P'(x)=\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-\ell}a_{n-\ell-i}S_i\right)x^{\ell-1}+O\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. أثبت أخيراً أنّ $a_0=1$ و أنّ $a_k=-\dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}S_i$ حين يكون k في $\mathbb{N}_n$.

4.. لتكن A و $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. نعرّف المتتاليتين $(B_k)_{1\le k\le n}$ و $(a_k)_{1\le k\le n}$ بالعلاقات:

❖ $(A,-\mathrm{tr}(B_1)) = (B_1, a_1)$

❖ $(A(B_{k-1} + a_{k-1}I_n), -\mathrm{tr}(B_k)/k) = (B_k, a_k)$ حين يكون $n \ge k > 1$.

أثبت أنّ

$$\chi_A(X) = (-1)^n\left(X^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}X^k\right)$$

التمرين 16. لتكن x و $]-1,+1[$، و n و $\mathbb{N}$. ولنعرّف

$$I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos nt}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t$$

1. احسب كلاً من $I_0(x)$ و $I_1(x)$.
2. نفترض أنّ $x \ne 0$، وأنّ $1 \le n$، احسب $I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)$ بدلالة $I_n(x)$ و x.
3. استنتج قيمة $I_n(x)$.

ꕤꕤ

الفصل السابع

الفضاءات الشعاعيّة المزوّدة بجداء سلّمي

يمثّل الحقلُ $\mathbb{K}$ في هذا الفصل حقلَ الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ ،
أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$.

VII.1 . الجداء السلّمي

VII.1-1 . تعريف: ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$. نسمّي جداءً سلّمياً على E كـلّ تطبيق

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K},\ (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$$

يُحقّق الخواص التالية:

- S_1 أياً كانت x في E ، يكُن التطبيق $R_x : E \to \mathbb{K}, y \mapsto \langle x,y \rangle$ شكلاً خطّياً.
- S_2 أياً كانت (x,y) في E^2 ، يكُن $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$ ، ونعبّر عن هذه الخاصّة بقولنا في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ إنّ الجداء السلّمي هرمتيّ. أمّا في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ فيُكتب هذا الشرط $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$ ، ونعبّر عنه بقولنا إنّ الجداء السلّمي متناظر.
- S_3 أياً كانت x في E ، يكُن $\langle x,x \rangle$ في $\mathbb{R}_+$ ، ونقول إنّ الجداءَ السلّمي موجبٌ.
- S_4 أياً كانت x في $E \backslash \{0\}$ ، يكُن $\langle x,x \rangle \neq 0$ ، ونقول إنّ الجداءَ السلّمي معرّفٌ.

ونسمّي فضاءَ جداء سلّمي كلّ فضاء شعاعي E مزوّد بجداء سلّمي، ونرمز إليه بالرمز $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle_E)$ ، أو $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ أو فقط E إذا لم يكن هنالك مجال للالتباس.

وأخيراً نسمّي فضاء إقليدياً كل فضاء جداء سلّمي منتهي البعد على الحقل $\mathbb{R}$ ، ونسمّي فضاء هرمتيّاً كل فضاء جداء سلّمي منتهي البعد على الحقل $\mathbb{C}$.

VII.1-2. ملاحظة: ليكن E فضاءَ جداء سلّمي،ولتكن $(x_1, x_2, z) \in E^3$ ، و $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ، حينئذ يكون

$$\begin{aligned}\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y\rangle &= \overline{\langle y, \lambda x_1 + \mu x_2\rangle} \\ &= \overline{\lambda \cdot \langle y, x_1\rangle + \mu \cdot \langle y, x_2\rangle} \\ &= \overline{\lambda} \cdot \langle x_1, y\rangle + \overline{\mu} \cdot \langle x_2, y\rangle\end{aligned}$$

فإذا كان $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ، كان الجداء السلّمي شكلاً ثنائي الخطيّة. أمّا في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ فنقول إنّ الجداء السلميّ نصف خطي بالنسبة إلى المركّبة الأولى.

VII.1-3. أمثلة:

❖ إذا كان $E = \mathbb{R}^n$ فإننا نسمّي الجداء السلّمي المألوف على E الجداء السلمي المعرّف بالعلاقة

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

حيث $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ من E .

❖ إذا كان $E = \mathbb{C}^n$ فإننا نسمّي الجداء السلّمي المألوف على E الجداء السلمي المعرّف بالعلاقة

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{y_k}$$

حيث $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ من E .

❖ إذا كان $E = C([0,1], \mathbb{C})$ أي فضاء التوابع المستمرّة على $[0,1]$ والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{C}$ ، فيمكننا أن نزوّد هذا الفضاء بالجداء السلّمي:

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}\,t \,^{\blacklozenge}$$

❖ إذا كان $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلّمي، وكان $T \in \mathcal{L}(E)$ تطبيقاً خطّياً متبايناً، فإننا نعرّف جداءً سلّمياً جديداً على E بوضع $\forall (x, y) \in E^2, \langle\langle x, y\rangle\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$.

♦ لُكاملة تابع مستمرٍ قِيَمُه عقدية، نُكامل جزأيه الحقيقي والتخيُّلي كلاً على حدَته. فإذا كان u و v من $C([a,b], \mathbb{R})$ كان بالتعريف $\int_a^b (u + i\,v) = \int_a^b u + i \int_a^b v$.

VII.1-4. تعريف: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي. نسمّي التطبيقَ

$$Q_{<,>} : E \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \langle x,x\rangle \overset{\text{تعريف}}{=} \|x\|^2$$

الشكل التربيعيّ الموافق للجداء السلمي $\langle\cdot,\cdot\rangle$. وكذلك نسمّي التطبيق

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

نظيم الجداء السلّمي الموافق للجداء السلمي $\langle\cdot,\cdot\rangle$. وسنرى لاحقاً أنّ هذه التسـمية مبررة، إذ إنّ $\|\cdot\|$ فعلاً نظيم[*] على الفضاء الشعاعي E.

إنّ معرفة الشكل التربيعي الموافق لجداء سلّمي كافية لتعيين هذا الجداء. هذا ما ستبيّنه المبرهنة التالية:

VII.1-5. مبرهنة: -المتطابقات القطبيّة- ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي.

- ❖ في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$، لدينا

$$\forall (x,y) \in E\times E,\quad \langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

- ❖ في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$، لدينا

$$\forall (x,y) \in E\times E,\quad \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \cdot \left\| i^k x + y\right\|^2$$

الإثبات

- حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. لتكن $(x,y) \in E\times E$، ولتكن $\varepsilon \in \{+1,-1\}$، عندئذ يكون

$$\|x+\varepsilon y\|^2 = \langle x+\varepsilon y, x+\varepsilon y\rangle = \langle x,x\rangle + \varepsilon\langle x,y\rangle + \varepsilon\langle y,x\rangle + \varepsilon^2\langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\varepsilon\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

حيث استفدنا من كوْن الجداء السلّمي متناظراً في هذه الحالة ومن كوْن $\varepsilon^2 = 1$. وهذه المساواة تقتضي مباشرة المتطابقتين الواردتين في نصّ المبرهنة.

- حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. لتكن $(x,y) \in E\times E$، ولتكن $\varepsilon \in \{+1,-1\}$، عندئذ يكون

$$\|x+\varepsilon y\|^2 = \|x\|^2 + \varepsilon\langle x,y\rangle + \varepsilon\langle y,x\rangle + \varepsilon^2\|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

---

[*] راجع الفصل السادس من كتاب التحليل ٢.

إذن نستنتج أنّ $\operatorname{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2)$

ومن جهة أخرى يكون

$$\operatorname{Im}\langle x,y\rangle = \operatorname{Re}(-i\langle x,y\rangle) = \operatorname{Re}(\langle i\,x,y\rangle) = \frac{1}{4}(\| i\,x+y \|^2 - \| i\,x-y \|^2)$$

وأخيراً

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \operatorname{Re}\langle x,y\rangle + i\operatorname{Im}\langle x,y\rangle \\ &= \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + i\| i\,x+y \|^2 - i\| i\,x-y \|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| -x+y \|^2 + i\| i\,x+y \|^2 - i\| -i\,x+y \|^2)\end{aligned}$$

وهذه هي العلاقة المطلوبة. □

VII.1-6. ملاحظة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي على الحقل $\mathbb{C}$. ولتكن $3 \le n$. لنضع $\omega_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ وهو جذر من المرتبة n للواحد. عندئذ تكون لدينا المتطابقة القطبية التالية، التي نترك إثباتها تمريناً للقارئ، وهي تعميم لتلك الواردة في المبرهنة السابقة،

$$\forall (x,y)\in E\times E,\quad \langle x,y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \cdot \| \omega^k x + y \|^2$$

VII.1-7. مبرهنة: -متراجحة Schwartz - ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، عندئذ

$$\forall (x,y)\in E\times E,\quad |\langle x,y\rangle| \le \| x \|\cdot\| y \|$$

وتتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة (x,y) مرتبطة خطّياً.

الإثبات

لتكن $(x,y) \in E\times E$. إذا كان $y = 0$ كانت النتيجة واضحة. لنفترض إذن أنّ $y \ne 0$، ولنضع $\lambda = \langle y,x\rangle / \| y \|^2$. عندئذ يكون

$$0 \le \| x - \lambda\, y \|^2 = \| x \|^2 + |\lambda|^2 \cdot \| x \|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x,\lambda y\rangle = \| x \|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\| y \|^2}.$$

وهذا يثبت المتراجحة المطلوبة ، ويبيِّن أن المساواة تتحقّق فقط إذا كان $x = \lambda y$. □

VII.1-8. ملاحظة: ينتج من متراجحة شـوارتز السابقة أنه في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ يكـون لـدينا $\frac{\langle x,y\rangle}{\| x \|\cdot\| y \|} \in [-1,+1]$ وذلك أياً كان الشعاعان غير المعدومين x و y وهذا ما يسمح بتعريف زاوية شعاعين غير معدومين x و y بأنها $(x \hat{,} y) = \arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\| x \|\cdot\| y \|}$.

VII.1-9. مبرهنة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، عندئذ يكون $\|\cdot\|$ نظيماً على E .

الإثبات

- إذا كان $\|x\|=0$ كان $x=0$ لأن الجداء السلّمي معرّف.
- أياً كانت x في E ، وأياً كانت λ في $\mathbb{K}$ ، فإنّ

$$\|\lambda\cdot x\|=\sqrt{\langle\lambda\cdot x,\lambda\cdot x\rangle}=\sqrt{\bar{\lambda}\lambda\cdot\langle x,x\rangle}=|\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle}=|\lambda|\cdot\|x\|$$

- وأخيراً أياً كانت (x,y) في $E\times E$ ، فلدينا، استناداً إلى متراجحة شوارتز،

$$|\mathrm{Re}\langle x,y\rangle|\leq|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|$$

ومن ثَمّ

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\leq\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2$$

وهذا يُثبت متراجحة المثلّث أي

$$\forall(x,y)\in E\times E,\quad \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

بذلك نكون قد أثبتنا أنّ $\|\cdot\|$ نظيم على E . □

VII.1-10. ملاحظة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن (x,y) في $E\times E$. عندئذ يكون لدينا التكافؤ التالي

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|\quad\Leftrightarrow\quad\|y\|\cdot x=\|x\|\cdot y$$

في الحقيقة، يبيّن الإثبات السابق أنّ المساواة تتحقّق في متراجحة المثلّث إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\geq 0$ ، و $\mathrm{Im}\langle x,y\rangle=0$ وكانت الجملة (x,y) مرتبطة خطيّاً. وتكافئ هذه الشروط مجتمعة كونْ $\|y\|\cdot x=\|x\|\cdot y$. □

VII.1-11. مبرهنة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن (x,y) في $E\times E$. عندئذ يكون لدينا المتطابقة التالية والتي تسمّى متطابقة متوازي الأضلاع

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

الإثبات

لتكن ε في $\{+1,-1\}$ ، لقد وجدنا سابقاً أنّ

$$\|x+\varepsilon y\|^2==\|x\|^2+2\varepsilon\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle+\|y\|^2$$

ونحصل على المتطابقة المطلوبة بجمع العلاقتين السابقتين. □

VII.1-12. ملاحظة: تميِّزُ متطابقةُ متوازي الأضلاع فضاءات الجداء السلّمي من بين الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة. أي إنه إذا كان $(E,\|\cdot\|)$ فضاءً شعاعيّاً منظّماً، وكان نظيمه يُحقّق متطابقة متوازي الأضلاع، فيوجد جداء سلّمي $\langle\cdot,\cdot\rangle$ على E بحيث يكون $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ أياً كانت $x \in E$.

VII.1-13. تعريف: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، وليكن $\|\cdot\|$ النظيم على E الموافق للجداء الداخلي. نقول إنّ $(E,\|\cdot\|)$ فضاءُ هيلبرت Hilbert إذا وفقط إذا كان الفضاء الشعاعي المنظّم $(E,\|\cdot\|)$ فضاءً تامّاً[♣].

VII.1-14. تعريف: لنذكّر أولاً ببعض التعاريف الخاصّة بالمصفوفات:

- ❖ إذا كانت $M \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ كانت المصفوفة ${}^tM$ في $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ هي منقول M. وكانت $\overline{M}$ هي المصفوفة المرافقة لـ M، أي التي ثوابتها هي مرافقات ثوابت M. وأخيراً نستخدم الرمز M^* للدلالة على المصفوفة ${}^t\overline{M}$.
- ❖ لتكن $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ⋖ نقول إنّ المصفوفة M متناظرة إذا وفقط إذا كان $M = {}^tM$.
  - ⋖ ونقول إنّ المصفوفة M هرمتيّة إذا وفقط إذا كان $M = M^*$، (هذا يكافئ كونها متناظرة في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
  - ⋖ نقول أيضاً إنّ المصفوفة M موجبة إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان
    1. $M = M^*$.
    2. $\forall X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}),\quad X^* M X \in \mathbb{R}_+$.

    (يمكن القارئ أن يثبت أنّ 2. ⇐ 1. في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
  - ⋖ وأخيراً نقول أيضاً إنّ المصفوفة M معرّفة موجبة إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان
    1. $M = M^*$.
    2. $\forall X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})\setminus\{0\},\quad X^* M X \in \mathbb{R}_+^*$.

[♣] راجع الفصل السادس من كتاب التحليل ٢.

VII.1-15. تعريف: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(x_1,\dots,x_m)$ جملة من أشعة الفضاء E . نسمّي مصفوفة Gram للجملة $(x_1,\dots,x_m)$ المصفوفة من $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ التي ثابت السطرِ ذي الدليل i والعمودِ ذي الدليل j فيها هو $\langle x_i,x_j\rangle$. ونرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز $\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_m)$.

VII.1-16. مبرهنة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(x_1,\dots,x_m)$ جملة من أشعة الفضاء E . عندئذ تكون المصفوفة $\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_m)$ موجبة، و تكون الشروط الثلاثة التالية متكافئة:

1. المصفوفة $\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_m)$ معرّفة موجبة.
2. المصفوفة $\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_m)$ قَلوبة.
3. الجملة $(x_1,\dots,x_m)$ حرّة.

الإثبات

لنضع $\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_m)=G=(g_{ij})$ ، حيث $g_{ij}=\langle x_i,x_j\rangle$.عندئذ، أياً كانت $(i,j)\in\mathbb{N}_m^2$ ، فإنّ

$$g_{ji}=\langle x_j,x_i\rangle=\overline{\langle x_i,x_j\rangle}=\overline{g_{ij}}$$

ومنه $G^*=G$.

من ناحية أخرى، ليكن $\Lambda={}^t[\lambda_1,\dots,\lambda_m]\in\mathcal{M}_{m\times1}(\mathbb{K})$. نجد بحساب بسيط أنّ

$$\Lambda^* G\,\Lambda=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_m^2}\overline{\lambda_i}\cdot\langle x_i,x_j\rangle\cdot\lambda_j=\left\|\sum_{i=1}^m\lambda_i\cdot x_i\right\|^2$$

فالمصفوفة G موجبة.

ونلاحظ من هذه المساواة، أنّه توجد ثوابت $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ من $\mathbb{K}$ ، ليست جميعها معدومة بحيث يكون $\sum_{i=1}^m\lambda_i\cdot x_i=0$ ، إذا وفقط إذا، وُجِدَ شعاع غير معدوم $\Lambda={}^t[\lambda_1,\dots,\lambda_m]$ بحيث يكون $\Lambda^* G\,\Lambda=0$. وهذا يثبت التكافؤ 1. $\Leftrightarrow$ 3.

لإثبات الاقتضاء 1. $\Leftarrow$ 2. نتأمّل التطبيق الخطّي

$$u_G:\mathcal{M}_{m\times1}(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_{m\times1}(\mathbb{K}),\ X\mapsto G\,X$$

إذا كانت $\Lambda \in \ker u_G$، كان $G\Lambda = 0$ ومن ثَمّ $\Lambda^* G\Lambda = 0$ وهذا يقتضي، استناداً إلى 1، أنّ $\Lambda = 0$. فالتطبيق u_G متباينٌ، وبناءً عليه يكون قَلوباً ومن ثَمّ تكون G قَلوبة.

وأخيراً، لنفترض أن الجملة $(x_1,\ldots,x_m)$ مرتبطة خطيّاً. عندئذ نجد $\Lambda = {}^t[\lambda_1,\ldots,\lambda_m]$، من $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$، بحيث $\Lambda \neq 0$، و $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \cdot x_j = 0$. نستنتج إذن أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_m, \quad 0 = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j \cdot \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}\cdot \lambda_j$$

وهذا يُكافئ أنّ $G\Lambda = 0$. ولمّا كانت $\Lambda \neq 0$، كان $\ker u_G \neq \{0\}$، فالتطبيق u_G ليس قَلوباً، ومن ثَمّ المصفوفة G ليست قَلوبة. □

VII.1-17. تعريف: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد وبُعده n في $\mathbb{N}^*$، وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E. عندئذ تسمّى المصفوفةُ $\mathrm{Gram}(\mathcal{E})$ مصفوفةَ الجداء السلّمي $\langle\cdot,\cdot\rangle$ في الأساس $\mathcal{E}$. وعندئذ أياً كان $X = {}^t[x_1,\ldots,x_n]$ و أياً كان $Y = {}^t[y_1,\ldots,y_n]$ من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ تتحقّق العلاقة

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \right\rangle = X^* G Y$$

تمرين: لتكن $H_n = (a_{ij})$ في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرّفة بالعلاقة $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$، والمعروفة باسم مصفوفة هيلبرت. إنّ H_n مصفوفة معرّفة موجبة.

في الحقيقة، إذا كان $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ أي فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة التي درجاتها أصغر تماماً من n، وزوّدنا E بالجداء السلّمي التالي

$$\forall (P,Q) \in E\times E, \quad \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

ثم أخذنا $\mathcal{E} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ أساساً للفضاء E، كان لدينا $H_n = \mathrm{Gram}(\mathcal{E})$. وهذا ما يثبت أنّ H_n مصفوفة معرّفة موجبة.

VII.1-18. مبرهنة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد وبُعده n ﻭ $\mathbb{N}^*$، وليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ و $\mathcal{F}=(f_1,\ldots,f_n)$ أساسين للفضاء E. عندئذ يكون

$$\mathrm{Gram}(\mathcal{E})=P^*\,\mathrm{Gram}(\mathcal{F})\,P$$

حيث $P=P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}=\mathrm{mat}(I_E,\mathcal{E},\mathcal{F})$.

الإثبات

لنضع $P=(p_{ij})$، فيكون عندئذ $\forall j\in\mathbb{N}_n,\ e_j=\sum_{k=1}^{n}p_{kj}\cdot f_k$. إذن، أياً كانت (i,j) ﻭ $\mathbb{N}_n^2$، يكُن

$$\langle e_i,e_j\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n}p_{ki}f_k,\sum_{\ell=1}^{n}p_{\ell j}f_\ell\right\rangle=\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}_n^2}\overline{p_{ki}}\,\langle f_k,f_\ell\rangle\,p_{\ell j}=[P^*\,\mathrm{Gram}(\mathcal{F})\,P]_{ij}$$

وهذه هي المساواة المطلوبة. □

VII.1-19. نتيجة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد وبُعده n ﻭ $\mathbb{N}^*$، و ليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E. عندئذ لا تتغيّر قيمة $\det\mathrm{Gram}(e_1,\ldots,e_n)$ إذا بادلنا بين أشعّة الجملة $\mathcal{E}$، أو إذا جمعنا إلى أحد الأشعة $e_1,\ldots,e_n$ عبارة خطيّة في بقيّة أشعّة الجملة $\mathcal{E}$.

الإثبات

ليكن σ تبديلاً من S_n، وليكن الأساس $\mathcal{F}=(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$. عندئذ يكون محدِّد المصفوفة $P=P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}=\mathrm{mat}(I_E,\mathcal{E},\mathcal{F})$ مساوياً توقيع التبديل σ أي: $\det P=\Delta(\sigma)$. ومنه يكون $\det P^*\cdot\det P=\Delta^2(\sigma)=1$، واستناداً إلى المبرهنة السابقة يكون

$$\det\ \mathrm{Gram}(\mathcal{E})=\det\ \mathrm{Gram}(\mathcal{F}).$$

من ناحية أخرى، إذا تأمّلنا الأساس $\mathcal{F}=(\tilde{e}_1,e_2,\ldots,e_n)$ حيث $\tilde{e}_1=e_1-\sum_{k=2}^{n}\lambda_k e_k$، كان لدينا

$$P=P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}=\mathrm{mat}(I_E,\mathcal{E},\mathcal{F})=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\\lambda_2&1&\ddots&&\vdots\\\vdots&0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&1&0\\\lambda_n&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}$$

ومنه $\det P=1$، وهذا ما يثبت أنّ $\det\ \mathrm{Gram}(\mathcal{E})=\det\ \mathrm{Gram}(\mathcal{F})$. □

2.VII. التعامد في فضاءات الجداء السلّمي

1-2.VII. تعريف: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي.

❖ نقول عن عنصرين x و y من E إنهما متعامدان، ونكتب $x\perp y$، إذا وفقط إذا كان $\langle x,y\rangle=0$.

❖ ونقول عن جماعة أشعة $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ من E إنها متعامدة إذا وفقط إذا كان

$$\forall(\alpha,\beta)\in A\times A,\quad \alpha\neq\beta\Rightarrow\left\langle x_\alpha,x_\beta\right\rangle=0$$

❖ ونقول عن جماعة أشعة $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ من E إنها متعامدة نظاميّة إذا وفقط إذا كان

$$\forall(\alpha,\beta)\in A\times A,\quad \left\langle x_\alpha,x_\beta\right\rangle=\delta_{\alpha,\beta}=\begin{cases}1 & : & \alpha=\beta\\ 0 & : & \alpha\neq\beta\end{cases}$$

❖ لتكن B مجموعة جزئيّة غير خالية من E، وليكن x عنصراً من E. نقول إنّ x عمودي على B، ونكتب $x\perp B$، إذا وفقط إذا كان $\forall y\in B,\ x\perp y$. ونرمز بالرمز $B^\perp$ إلى مجموعة العناصر x التي تنتمي إلى E والعموديّة على B.

2-2.VII. مثال هام: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاءَ التوابع المستمرّة على $[0,2\pi]$، والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{C}$، مزوداً بالجداء السلّمي:

$$\forall(f,g)\in E\times E,\quad \langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}\,t$$

ولتكن الجماعة $(e_k)_{k\in Z}$، حيث $e_k(x)=\exp(ikx)$. عندئذ تكون الجماعة $(e_k)_{k\in Z}$ جماعة متعامدة نظاميّة في E.

3-2.VII. مبرهنة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ جماعة متعامدة من الأشعّة غير المعدومة في E. حينئذ تكون الجماعةُ $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ حرةً.

الإثبات

في الحقيقة، إن مصفوفة Gram لكلّ جماعة جزئيّة منتهية من $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ قَلوبةٌ (لأنها قطرية وثوابت قطرها غير معدومة). وهذا يُثبت أنّ كل جماعة جزئيّة منتهية من $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ تكون حرةً، وهذا هو المطلوب إثباته. □

VII.2-4. مبرهنة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ جملة حـرّة في E. حينئذ توجد جملة متعامدة نظاميّة وحيدة $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ في E، تُحقّق، أيـاً كـان k في $\mathbb{N}_n$، الشرطين التاليين:

1. $\text{vect}((\beta_1,\ldots,\beta_k)) = \text{vect}((\alpha_1,\ldots,\alpha_k))$.
2. $\langle\alpha_k,\beta_k\rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

الإثبات

سنبدأ أوّلاً بإثبات الوحدانية. لنفترض وجود جملتين متعامدتين نظاميتين $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$، و $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$، تُحقّقان، أياً كان k في $\mathbb{N}_n$، الشرطين التاليين:

1. $\text{vect}((\beta_1,\ldots,\beta_k)) = \text{vect}((\alpha_1,\ldots,\alpha_k)) = \text{vect}((\gamma_1,\ldots,\gamma_k))$.
2. $\langle\alpha_k,\beta_k\rangle \in \mathbb{R}_+^*$ و $\langle\alpha_k,\gamma_k\rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

لتكن p في $\mathbb{N}_n$. لّما كان β_p في $\text{vect}((\gamma_1,\ldots,\gamma_p))$، والجملة $(\gamma_1,\ldots,\gamma_p)$ متعامدة نظاميّة كان

$$\beta_p = \sum_{j=1}^{p}\langle\gamma_j,\beta_p\rangle\gamma_j$$

ولكن إذا كان $j < p$، كان γ_j في $\text{vect}((\gamma_1,\ldots,\gamma_j)) = \text{vect}((\beta_1,\ldots,\beta_j))$. وكان مـن ثَـم $\beta_p \perp \gamma_j$، وهذا يسمح باختصار المجموع السابق ليصبح

$$\beta_p = t_p\,\gamma_p \text{ ، حيث } \langle\gamma_p,\beta_p\rangle = t_p$$

ونستنتج من الشرط 2. ومن العلاقة $\langle\alpha_p,\beta_p\rangle = t_p\langle\alpha_p,\gamma_p\rangle$، أنّ t_p في $\mathbb{R}_+^*$. وأخيراً ينجم عن كوْن الجملتين نظاميتين أنّ $t_p = \|\beta_p\| = t_p\|\gamma_p\| = 1$. وهذا يقتضي $\beta_p = \gamma_p$.

أمّا إثبات الوجود فسنجريه بالتدريج على عدد العناصر في الجملة أي n.

- حالة $n = 1$ بسيطة، إذ يكفي أن نأخذ $\beta_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|}\cdot\alpha_1$.

- لنفترض صحّةَ النتيجة عند قيمة ما للعدد n. ولتكن $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ جملة حرّة في E. نجد استناداً إلى فرض التدريج جملة متعامدة نظاميّة $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ في E، تُحقّق، أيـاً كـان k في $\mathbb{N}_n$، الشرطين التاليين:

1. $\text{vect}((\beta_1,\ldots,\beta_k)) = \text{vect}((\alpha_1,\ldots,\alpha_k))$.
2. $\langle\alpha_k,\beta_k\rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

لنضع إذن بالتعريف

$$\tilde{\beta}_{n+1} = \alpha_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle\beta_k,\alpha_{n+1}\rangle\cdot\beta_k$$

ولنلاحظ ما يلي:

أولاً : إنّ $\tilde{\beta}_{n+1} \neq 0$ وذلك لأن الجملة $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ جملة حرّة في E .

ثانياً : نجد بحساب بسيط ، أياً كان p في $\mathbb{N}_n$ ،

$$\langle\beta_p,\tilde{\beta}_{n+1}\rangle = \langle\beta_p,\alpha_{n+1}\rangle - \sum_{k=1}^{n}\langle\beta_k,\alpha_{n+1}\rangle\cdot\underbrace{\langle\beta_p,\beta_k\rangle}_{\delta_{p,k}\text{ـل}} = \langle\beta_p,\alpha_{n+1}\rangle - \langle\beta_p,\alpha_{n+1}\rangle = 0$$

ومن ثَم يكون $\tilde{\beta}_{n+1} \perp \beta_p \quad \forall p \in \mathbb{N}_n,$.

ثالثاً : باستخدام الخاصّة السابقة نجد أيضاً

$$\langle\tilde{\beta}_{n+1},\tilde{\beta}_{n+1}\rangle = \langle\tilde{\beta}_{n+1},\alpha_{n+1}\rangle - \sum_{k=1}^{n}\langle\beta_k,\alpha_{n+1}\rangle\cdot\underbrace{\langle\tilde{\beta}_{n+1},\beta_k\rangle}_{0\text{ـل}} = \langle\tilde{\beta}_{n+1},\alpha_{n+1}\rangle$$

ومنه يكون $\langle\alpha_{n+1},\tilde{\beta}_{n+1}\rangle$ في $\mathbb{R}_+^*$.

رابعاً : إنّ المساواة $\mathrm{vect}((\beta_1,\ldots,\beta_n,\tilde{\beta}_{n+1})) = \mathrm{vect}((\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}))$ واضحة.

يكفي إذن حتى يتم المطلوب أن نضع $\beta_{n+1} = \frac{1}{\|\tilde{\beta}_{n+1}\|}\cdot\tilde{\beta}_{n+1}$. □

VII.2-5. ملاحظة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ جملة حرّة في E . ولتكن $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ الجملة المتعامدة النظاميّة الوحيدة في E ، التي تُحقّق، أياً كان k في $\mathbb{N}_n$ ، الشرطين التاليين:

1. $\mathrm{vect}((\beta_1,\ldots,\beta_k)) = \mathrm{vect}((\alpha_1,\ldots,\alpha_k))$.
2. $\langle\alpha_k,\beta_k\rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

تُسمّى إجرائيّة إنشاء $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ انطلاقاً من $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ إجرائيةَ Gram-Schmidt.

تمرين: ليكن $E = \mathbb{R}[X]$ أي فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة، مزوّداً بالجداء السلّمي:

$$\forall(P,Q) \in E \times E, \quad \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

نترك للقارئ مهمّة تطبيق إجرائيّة Gram-Schmidt على الجملة $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3)$.

ينتج من المبرهنة النتيجة المُهمّة التالية:

VII.2-6. نتيجة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البعد، عندئذ يوجد في E أساس متعامد نظامي.

VII.2-7. مبرهنة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البعد وبُعده n و $\mathbb{N}^*$ ، ولتكن $(x_1,\ldots,x_m)$ جملة من عناصر E . عندئذ توجد مصفوفة A و $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ ، بحيث

$$\operatorname{Gram}(x_1,\ldots,x_m) = A^* A$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً متعامداً نظاميّاً للفضاء E . عندئذ يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_m, \quad x_j = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x_j\rangle \cdot e_k$$

ومن ثَمّ، أياً كان (i,j) و $\mathbb{N}_m^2$ ، فإنّ

$$\begin{aligned}\langle x_i, x_j\rangle &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_k, x_i\rangle}\cdot\langle e_\ell, x_j\rangle\cdot\langle e_k, e_\ell\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_k, x_i\rangle}\cdot\langle e_k, x_j\rangle\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا المصفوفة $A=(a_{ij})$ و $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ بالعلاقة $a_{ij}=\langle e_i, x_j\rangle$ ، كان لدينا

$$\langle x_i, x_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}}\cdot a_{kj} = [A^* A]_{ij}$$

وهذا ما يثبت أنّ $\operatorname{Gram}(x_1,\ldots,x_m) = A^* A$. □

VII.2-8. مبرهنة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البعد وبُعده n و $\mathbb{N}^*$ ، ولتكن $(x_1,\ldots,x_n)$ أساساً للفضاء E . عندئذ توجد مصفوفة <u>وحيدة</u> A و $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، مثلثيّة عليا وثوابت قطرها الأساسي[d] موجبة تماماً، بحيث

$$\operatorname{Gram}(x_1,\ldots,x_n) = A^* A$$

ومن ناحية أخرى، يكون

$$\det \operatorname{Gram}(x_1,\ldots,x_n) \le \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

حيث تتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ متعامدة.

[d] القطر الأساسي لمصفوفة مربّعة $M=(a_{ij})=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ هو الجملة $(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$.

الإثبات

لنثبت أولاً الوحدانية. لنفترض أنّ $A^* A = B^* B$ ، حيث A و B مصفوفتان مثلّثيتان علويتان ثوابت قطريهما الأساسيان موجبة تماماً، عندئذ يكون $B A^{-1} = (B^*)^{-1} A^* = D$.

فمن جهة أولى تكون $D = B A^{-1}$ مصفوفة مثلّثية عليا، ومن جهة ثانية تكون المصفوفة $D = (B^*)^{-1} A^*$ مصفوفة مثلّثية سفلى. فالمصفوفة D مصفوفة قطريّة، ثوابت قطرها موجبة تماماً. وأخيراً

$$D^2 = D D^* = B A^{-1} ((B^*)^{-1} A^*)^* = B A^{-1} A B^{-1} = I_n$$

نستنتج إذن أنّ $D = I_n$ ، ومن ثَم $B = A$.

أمّا لإثبات الوجود، فنستخدم إجرائيّة Gram-Schmidt لإيجاد أساس متعامد نظامي $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ لـ E ، بحيث

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad (\operatorname{vect}((x_1, \ldots, x_k)) = \operatorname{vect}((e_1, \ldots, e_k))) \wedge (\langle e_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*)$$

فإذا عرّفنا كما في المبرهنة السابقة $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ بحيث $a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle$ ، كان لدينا من جهة أولى $\operatorname{Gram}(x_1, \ldots, x_n) = A^* A$ ، ومن جهة ثانية :

- أياً كانت $k \in \mathbb{N}_n$ ، فإنّ $a_{kk} = \langle e_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.
- وأياً كانت $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ ، بحيث $i > j$ ، كان $x_j \in \operatorname{vect}((e_1, \ldots, e_j))$ ، ومن ثَم $e_i \perp x_j$. إذن $a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle = 0$.

هذا يثبت أنّ المصفوفة A مصفوفة مثلثيّة عليا ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً.

من ناحية أخرى لدينا

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} a_{kk} = \prod_{k=1}^{n} \langle e_k, x_k \rangle \le \prod_{k=1}^{n} \| e_k \| \cdot \| x_k \| = \prod_{k=1}^{n} \| x_k \|$$

إذن، $\det \operatorname{Gram}(x_1, \ldots, x_n) = |\det A|^2 \le \prod_{k=1}^{n} \| x_k \|^2$.

ونرى أنّ المساواة تتحقّق في المتراجحة السابقة إذا وفقط إذا كان

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \langle e_k, x_k \rangle = \| e_k \| \cdot \| x_k \|$$

وهذا يُكافئ الشرط

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad x_k = \| x_k \| \cdot e_k$$

أي إنّ الجملة $(x_1, \ldots, x_n)$ متعامدة. □

.9-2.VII نتيجة: ليكن $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(x_1,\ldots,x_m)$ جملة من عناصر الفضاء F. عندئذ يكون

$$\det \operatorname{Gram}(x_1,\ldots,x_m) \le \prod_{k=1}^{m} \|x_k\|^2$$

حيث تتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة $(x_1,\ldots,x_m)$ متعامدة، أو إذا انعـدم أحد أشعّتها.

الإثبات

إذا كانت الجملة $(x_1,\ldots,x_m)$ مرتبطة، كانت المتراجحة صحيحة وضوحاً، لأن طرفها الأيسر معدوم في هذه الحالة، وتتحقّق عندها المساواة إذا وفقط إذا انعدم أحد أشعة الجملة.

أمّا إذا كانت الجملة $(x_1,\ldots,x_m)$ حرّة، فإننا نحصل على المطلوب بتطبيـق المبرهنـة السابقة على الفضاء $E = \operatorname{vect}((x_1,\ldots,x_m))$. ❐

.10-2.VII نتيجة: - تفريق Cholesky- ليكن M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة معرّفة موجبة. عندئذ توجد مصفوفة مثلّثية عليا وحيدة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً بحيث $M = A^* A$.

الإثبات

لنزوّد الفضاء الشعاعي $E = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$، بالجداء السلّمي المعرّف كما يلي

$$\forall (X,Y) \in E \times E, \quad \langle\langle X,Y \rangle\rangle = X^* M Y$$

وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني في E. عندئـذ يكـون $M = \operatorname{Gram}_{\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle}(\mathcal{E})$، ونحصل على المطلوب استناداً إلى المبرهنة 8-2.VII. ❐

.11-2.VII ملاحظة: إنّ عكس المبرهنة السابقة صحيح أيضاً. فإذا كانت $M = A^* A$ حيـث A من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$، كانت المصفوفة M معرّفة موجبة. وذلك لأنه من جهة أولى يكون

$$M^* = A^*(A^*)^* = A^* A = M$$

ومن جهة ثانية،

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad X^* M X = \|A X\|^2$$

حيث $\|\cdot\|$ هو النظيم المرافق للجداء السلّمي المألوف على $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

VII.2-12. نتيجة: - متراجحة Hadamard- ليكن $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. عندئذ يكون

$$|\det A| \le \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \cdot$$

الإثبات

يمكننا أن نفترض أنّ المصفوفة A قلوبة، وإلاّ كانت المتراجحة واضحة.

لتزوِّد الفضاء الشعاعي $E = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ ، بالجداء السلّمي المعرّف كما يلي

$$\forall (X,Y) \in E \times E, \quad \langle\langle X,Y \rangle\rangle = X^* A^* A Y = \langle AX, AX \rangle$$

حيث $\langle \cdot,\cdot \rangle$ هو الجداء السلّمي المألوف على E . وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني في E . عندئـــذ يكـــون $A^* A = \mathrm{Gram}_{\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle}(\mathcal{E})$ ، و استناداً إلى النتيجة VII.2-9. يكون

$$\left|\det(A^* A)\right| \le \prod_{j=1}^{n} \langle\langle e_j, e_j \rangle\rangle$$

أو

$$|\det A| \le \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\langle Ae_j, Ae_j \rangle} = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \qquad \square$$

VII.3. الإسقاط القائم

VII.3-1. مبرهنة : ليكن $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ فضاء جداء سلّمي، وليكن F فضاءً شعاعيّاً جزئياً مـــن E ، وأخيراً لتكن $\beta \in E$.

1. يكون عنصرٌ $\alpha \in F$ أفضل تقريب لـــ β بعنصر من F ، (أي يُحقّق $\forall \gamma \in F, \quad \|\beta - \alpha\| \le \|\beta - \gamma\|$ ، أو $\|\beta - \alpha\| = d(\beta, F)$)، إذا وفقط إذا كان $\beta - \alpha \perp F$.
2. إذا وُجدَ $\alpha \in F$ أفضل تقريب لـــ β بعنصر من F ، كان هذا العنصر وحيداً.
3. لنفترض أنّ بُعد F منته، وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً لـــ F . عندئذ يكون $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, \beta \rangle e_k$ هو أفضل تقريب لـــ β بعنصر من F .
4. إذا كان الفضاء F فضاء هلبرت، وُجدَ عنصر $\alpha \in F$ يكون أفضل تقريب لـــ β بعنصر من F .

الإثبات

سنعرض الإثبات في حالة $\mathbb{C} = \mathbb{K}$ ، لأنّ حالة $\mathbb{R} = \mathbb{K}$ أبسط ونترك تفاصيلها للقارئ.

1. ليكن $\gamma \in F$. عندئذ يكون لدينا

$$\|\beta-\gamma\|^2 = \|\beta-\alpha\|^2 + \|\alpha-\gamma\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle\beta-\alpha, \underset{\in F \text{ لـ}}{\alpha-\gamma}\rangle \qquad (*)$$

فإذا كان $\beta-\alpha \perp F$ كان $\langle\beta-\alpha,\alpha-\gamma\rangle = 0$ ، ومن ثَمّ $\|\beta-\gamma\| \geq \|\beta-\alpha\|$. أي إنّ α هو أفضل تقريب لـ β بعنصر من F .

وبالعكس، إذا كان $\|\beta-\alpha\| \leq \|\beta-\gamma\|$ ، $\forall\gamma \in F,$ ، كان لدينا، بناءً على (*)،

$$\forall\gamma \in F, \quad \|\alpha-\gamma\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle\beta-\alpha,\alpha-\gamma\rangle \geq 0$$

أو

$$\forall\delta \in F, \quad \|\delta\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle\beta-\alpha,\delta\rangle \geq 0$$

ومن ثَمّ

$$\forall\delta \in F, \forall(r,t) \in \mathbb{R}^2, \quad r^2\|\delta\|^2 + 2r\operatorname{Re}\left\langle\beta-\alpha, e^{it}\cdot\delta\right\rangle \geq 0$$

وهذا يقتضي

$$\forall\delta \in F, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}(e^{it}\cdot\langle\beta-\alpha,\delta\rangle) = 0$$

وأخيراً، لأنّ t عدد كيفيّ، يكون

$$\forall\delta \in F, \quad \langle\beta-\alpha,\delta\rangle = 0$$

أو $\beta-\alpha \perp F$.

2. ليكن $\alpha \in F$ أفضل تقريب لـ β بعنصر من F ، وليكن أيضاً $\alpha' \in F$ أفضل تقريب لـ β بعنصر من F . عندئذ يكون $\beta-\alpha \perp F$ و $\beta-\alpha' \perp F$ وذلك استناداً إلى ما سبق. ينتج من ذلك أنّ $\alpha'-\alpha = (\beta-\alpha)-(\beta-\alpha') \perp F$ ، ومن ثَمّ يكون

$$\|\alpha'-\alpha\|^2 = \langle\alpha'-\alpha, \underset{\in F \text{ لـ}}{\alpha'-\alpha}\rangle = 0$$

أو $\alpha = \alpha'$.

3. من الواضح أنّ $\alpha = \sum_{k=1}^{n}\langle e_k,\beta\rangle e_k$ عنصر من F . يكفي إذن أن نتوثق أنّ $\beta-\alpha \perp F$. ولتحقيق ذلك يكفي إثباتُ أنّ $\langle e_k,\beta-\alpha\rangle = 0$ أياً كانت $k \in \mathbb{N}_n$. وهذا أمر ميسور نترك تفاصيله البسيطة للقارئ.

4. لنعرّف $d = d(\beta, F) = \inf\{\|\beta-\gamma\| : \gamma \in F\}$ ، وهي المسافة بين β والفضاء الجزئي F . عندئذ يوجد، أياً كانت n في $\mathbb{N}^*$ ، عنصر α_n في F بحيث $\|\beta-\alpha_n\|^2 \le d^2 + \frac{1}{n^2}$.

لتكن (n,m) في $\mathbb{N}^{*2}$ ، بحيث $m < n$ ، عندئذ يمكننا أن نكتب، بناءً على متطابقة متوازي الأضلاع،

$$\begin{aligned}\|\alpha_n - \alpha_m\|^2 &= \|(\beta-\alpha_m)-(\beta-\alpha_n)\|^2\\ &= 2\|\beta-\alpha_m\|^2 + 2\|\beta-\alpha_n\|^2 - \|2\beta-\alpha_n-\alpha_m\|^2\\ &= 2\|\beta-\alpha_m\|^2 + 2\|\beta-\alpha_n\|^2 - 4\left\|\beta - \frac{1}{2}(\alpha_n+\alpha_m)\right\|^2\end{aligned}$$

ولكنّ F فضاء شعاعي، إذن $\frac{1}{2}(\alpha_n+\alpha_m)$ في F ، ومن ثمّ

$$\|\alpha_n - \alpha_m\|^2 \le 2d^2 + \frac{2}{m^2} + 2d^2 + \frac{2}{n^2} - 4d^2 \le \frac{4}{m^2}$$

وبذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad m < n \Rightarrow \|\alpha_n - \alpha_m\| \le \frac{2}{m}$$

فالمتتالية $(\alpha_n)_{n\ge 1}$ تُحقّق شرط كوشي في الفضاء التام F . ينجم عن ذلك أنها متقاربة نحو عنصر $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ في F . ولمّا كان

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d^2 \le \|\beta-\alpha_n\|^2 \le d^2 + \frac{1}{n^2}$$

أمكننا أن نستنتج، بجعل n تسعى إلى $+\infty$ ، أنّ $d = \|\beta - \alpha\|$. أي

$$\|\beta-\alpha\| = \inf\{\|\beta-\gamma\| : \gamma \in F\}$$

وهذا يُكمل الإثبات. □

VII.3-2. تعريف : ليكن $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، وليكن F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E ، وأخيراً لتكن β في E .إذا وُجِدَ عنصرٌ α في F يكون أفضل تقريب لـ β بعنصر من F ، قلنا إنّ α هو المسقط القائم لـ β على F . وقلنا أيضاً إنّ β يقبلُ مسقطاً قائماً على F .

VII.3-3. مبرهنة : ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، وليكن F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E، نفترض أنّ كلّ عنصر من E يقبلُ مسقطاً قائماً على F. عندئذ

1. إن المجموعة F مجموعة مغلقة في E. (حيث E مزوّد بالنظيم الموافق للجداء السلمي).
2. إذا رمزنا بالرمز P_F للتطبيق الذي منطلقه E، ومستقره E، ويربط بكل عنصر من E مسقطَه القائم على F. كان P_F إسقاطاً خطياً يُحقّق

$$F = \operatorname{Im} P_F \quad \text{و} \quad F^\perp = \ker P_F .$$

ويكون من ثَمّ $E = F \oplus F^\perp$.

3. يقبل كلُّ عنصر E من مسقطاً قائماً على $F^\perp$. ويكون $P_{F^\perp} = I - P_F$.

الإثبات

1. لنتأمّل عنصراً x لاصقاً بـ F، أي $x \in \overline{F}$، ولتكن $\alpha \in F$ المسقط القائم لـ x على F. عندئذ يكون $\|x-\alpha\| = d(x,F) = d(x,\overline{F}) = 0$، وهذا يبيّن أنّ $x = \alpha \in F$. إذن $F = \overline{F}$ وهذه المجموعة مغلقة.

2. لتكن $(x,y) \in E^2$، ولتكن $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. ولنعرّف $z = \lambda P_F(x) + \mu P_F(y) \in F$. فيكون

$$\lambda x + \mu y - z = \lambda \underbrace{(x - P_F(x))}_{F^\perp \text{ من}} + \mu \underbrace{(y - P_F(y))}_{F^\perp \text{ من}}$$

إذن $\lambda x + \mu y - z \perp F$، أي إنّ z هو المسقط القائم لـ $\lambda x + \mu y$ على F، أو

$$P_F(\lambda x + \mu y) = z = \lambda P_F(x) + \mu P_F(y) .$$

نكون إذن قد أثبتنا أنّ P_F تطبيق خطي.

من ناحية أخرى، إذا كان $x \in F$، كان x نفسه أفضل تقريب لـ x بعنصر من F، ومنه نجد $\forall x \in F,\ P_F(x) = x$، وهذا يقتضي أنّ $P_F \circ P_F = P_F$، و أنّ $F = \operatorname{Im} P_F$. وكذلك نلاحظ أنّ

$$x \in \ker P_F \Leftrightarrow P_F(x) = 0 \Leftrightarrow x - 0 \perp F \Leftrightarrow x \in F^\perp$$

أي $\ker P_F = F^\perp$. وأخيراً لمّا كان P_F إسقاطاً خطياً كان $E = \operatorname{Im} P_F \oplus \ker P_F$.

3. ليكن $\beta \in E$، ولنضع $\alpha = \beta - P_F(\beta)$. عندئذ يكون $\alpha \in F^\perp$، و $\beta - \alpha \perp F^\perp$. إذن α هو المسقط القائم لـ β على $F^\perp$. أي $P_{F^\perp}(\beta) = \beta - P_F(\beta)$. □

VII.3-4. نتيجة : ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، وليكن F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E . عندئذ تتحقّق جميع نتائج المبرهنة السابقة إذا كان F فضاء هلبرت.(لاحظ أنّ كل فضاء جداء سلمي منتهي البُعد يكون فضاء هلبرت). وفي الحالة التي يكون فيها F منتهي البُعد، يمكننا أن نكتب

$$\forall x \in E, \quad P_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$$

حيث $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساس متعامد نظامي ما للفضاء F .

الإثبات

تنتج هذه الخاصّة مباشرة من المبرهنة VII.3-1. □

VII.3-5. نتيجة :-متراجحة Bessel- ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، ولتكن $(e_1,\ldots,e_n)$ جملة متعامدة نظاميّة في E . عندئذ يكون

$$\forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^{n} \left|\langle e_k, x\rangle\right|^2 \le \| x \|^2$$

وتتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كان $x \in \mathrm{vect}((e_1,\ldots e_n))$.

الإثبات

لنضع $F = \mathrm{vect}((e_1,\ldots e_n))$ ، ولتكن x في E . لمّا كان الشعاعان $P_F(x)$ و $x - P_F(x)$ متعامدين، أمكننا أن نكتبَ

$$\| x \|^2 = \| P_F(x) \|^2 + \| x - P_F(x) \|^2$$

ومن ثَمّ تكون لدينا المتراجحة $\| P_F(x) \|^2 \le \| x \|^2$ ، حيث تتحقّق المساواة فيها إذا وفقط إذا كان $x = P_F(x)$ أي $x \in \mathrm{vect}((e_1,\ldots e_n))$. وأخيراً نلاحظ استناداً إلى النتيجة السابقة أنّ

$$\| P_F(x) \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\langle e_k, x\rangle\right|^2$$

وبذلك نكون قد أثبتنا المطلوب. □

VII.3-6. مثال : ليكن f تابعاً مستمراً على المجال $[0,2\pi]$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{C}$. ولنعرّف ثابت فورييه -Fourier- لـ f الموافق للدليل n و $\mathbb{Z}$ ، بأنّه $C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$ ، عندئذ يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=-n}^{n} |C_k(f)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

في الحقيقة، هذه هي متراجحة Bessel مطبّقة على فضاء التوابع المستمرّة على $[0,2\pi]$ ، والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{C}$ ، بعد تزويده بالجداء السلّمي:

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

وعلى الجملة المتعامدة النظاميّة $(e_k)_{-n\le k\le n}$ حيث $e_k(x) = \exp(ikx)$.

VII.3-7. مبرهنة : ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي، وليكن F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E . وأخيراً ليكن $(x_1,\ldots,x_n)$ أساساً ما لـ F . عندئذ يكون

$$\forall x \in F, \quad d^2(x,F) = \frac{\det\ \mathrm{Gram}(x,x_1,\ldots,x_n)}{\det\ \mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_n)}$$

الإثبات

ليكن x و E . نعلم بمقتضى النتيجة VII.1-18. أنّ

$$\det\ \mathrm{Gram}(x,x_1,\ldots,x_n) = \det\ \mathrm{Gram}(x - P_F(x),x_1,\ldots,x_n)$$

وذلك لأن $P_F(x)$ هو عبارة خطية بالأشعة $(x_1,\ldots,x_n)$. ولكن لمّا كان $x - P_F(x) \perp x_k$ ، وذلك أيّاً كان k و $\mathbb{N}_n$ ، أمكننا أن نكتبَ

$$\mathrm{Gram}(x - P_F(x),x_1,\ldots,x_n) = \left[\begin{array}{c|ccc} \|x - P_F(x)\|^2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_n) & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

ومنه

$$\det\ \mathrm{Gram}(x,x_1,\ldots,x_n) = \|x - P_F(x)\|^2 \det\ \mathrm{Gram}(x_1,\ldots,x_n)$$

ونحصل على المطلوب بملاحظة أنّ $\|x - P_F(x)\| = d(x,F)$. □

VII.3-8. مثال : ليكن $E = \mathbb{R}[X]$ ، ولنزوّده بالجداء السلّمي

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \langle P,Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

وليكن $F_n = \mathrm{vect}((1, X, \ldots, X^{n-1}))$. المطلوب هو تعيين $d(X^m, F_n)$ حين يكون $m \geq n$.

لنضع $\mathcal{H} = \mathrm{Gram}(1, X, \ldots, X^{n-1}, X^m)$ فيكون

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{m+n} \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \cdots & \frac{1}{m+n} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

لحساب محدّد $\mathcal{H}$ نطرح العمود الأخير من بقيّة الأعمدة فنجد

$$\det \mathcal{H} = \det \begin{bmatrix} \frac{m}{m+1} & \frac{m-1}{2(m+1)} & \cdots & \frac{m-n+1}{n(m+1)} & \frac{1}{m+1} \\ \frac{m}{2(m+2)} & \frac{m-1}{3(m+2)} & \cdots & \frac{m-n+1}{(n+1)(m+2)} & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{m}{n(m+n)} & \frac{m-1}{(n+1)(m+n)} & \cdots & \frac{m-n+1}{(2n-1)(m+n)} & \frac{1}{m+n} \\ \frac{m}{(m+1)(2m+1)} & \frac{m-1}{(m+2)(2m+1)} & \cdots & \frac{m-n+1}{(m+n)(2m+1)} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\det \mathcal{H} = \frac{(m!)^2}{(m-n)! \cdot (m+n)! \cdot (2m+1)} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} & 1 \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \cdots & \frac{1}{m+n} & 1 \end{bmatrix}$$

وبأسلوب مماثل نجد بعد طرح السطر الأخير من بقية الأسطر

$$\det \mathcal{H} = \frac{(m!)^4}{((m-n)!)^2 \cdot ((m+n)!)^2 \cdot (2m+1)} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} & 0 \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \cdots & \frac{1}{m+n} & 1 \end{bmatrix}$$

وبنشر هذا المحدّد وفق العمود الأخير نجد

$$\det\mathcal{H} = \frac{(m!)^4}{((m-n)!)^2\cdot((m+n)!)^2\cdot(2m+1)}\det\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

ولّما كان

$$\text{Gram}(1,X,\ldots,X^{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

أمكننا أن نكتب

$$d^2(X^m,F_n) = \frac{\det\text{Gram}(1,X,\ldots,X^{n-1},X^m)}{\det\text{Gram}(1,X,\ldots,X^{n-1})} = \frac{(m!)^4}{((m-n)!)^2\cdot((m+n)!)^2\cdot(2m+1)}$$

ومنه

$$d(X^m,F_n) = \frac{(m!)^2}{(m-n)!\cdot(m+n)!\cdot\sqrt{2m+1}}$$

أو

$$d(X^m,\text{vect}((1,X,\ldots,X^{n-1}))) = \begin{cases} 0 & : \ m<n \\ \dfrac{C_{2m}^{m-n}}{C_{2m}^{m}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2m+1}} & : \ m\geq n \end{cases}$$

4.VII. الأشكال الخطيّة، والتطبيقات الخطيّة المرافقة

1-4.VII. مبرهنة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد. وليكن f شكلاً خطيّاً على E، أي f ∋ E^*. عندئذ يوجد عنصر وحيد β ∋ E بحيث يكون

$$\forall x\in E,\quad f(x) = \langle\beta,x\rangle$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً لـ E. ولنفترض وجود عنصر β ∋ E يُحقق المطلوب. عندئذ، أياً كان x ∋ E، يكُن

$$\langle\beta,x\rangle = f(x) = f\Big(\sum_{k=1}^{n}\langle e_k,x\rangle e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n}\langle e_k,x\rangle f(e_k) = \Big\langle\sum_{k=1}^{n}\overline{f(e_k)}\cdot e_k, x\Big\rangle$$

ومن ثَمّ لا بد أن يكون $\beta = \sum_{k=1}^{n}\overline{f(e_k)}\cdot e_k$، وهذا ما يثبت وحدانية β.

من ناحية أخرى، إذا تأمّلنا العنصر $\beta = \sum_{k=1}^{n} \overline{f(e_k)} \cdot e_k$، وجدنا

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad f(e_i) = \langle \beta, e_i \rangle$$

وينتج من ذلك أنّ $\forall x \in E, \quad f(x) = \langle \beta, x \rangle$، لكوْن الطرفين خطيّين. □

VII.4-2. ملاحظة: يمكن تعميم المبرهنة السابقة على النحو التالي: ليكن $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء هيلبرت. وليكن f شكلاً خطيّاً مستمراً على H. عندئذ يوجد عنصر وحيد $\beta \in H$ بحيث يكون $\forall x \in H, \quad f(x) = \langle \beta, x \rangle$.

في الحقيقة، الوحدانية أمر بسيط نتركه للقارئ، لنثبت إذن الوجود. يمكننا أن نفترض أنّ $f \neq 0$، يوجد حينئذ $\alpha \in H$ بحيث $f(\alpha) = 1$. ولمّا كان f مستمراً، كان $F = \ker f$ فضاء شعاعياً جزئياً مغلقاً من H. يمكننا إذن أن نعرّف P_F الإسقاط القائم لـ H على F.

ونعرّف من ثَمّ $\tilde{\beta} = \alpha - P_F(\alpha)$، فيكون $f(\tilde{\beta}) = 1$ و $\tilde{\beta} \perp F$.

أخيراً، أياً كانت $x \in H$، كان $x - f(x) \cdot \tilde{\beta}$ عنصراً من F، ومن ثَمّ

$$\left\langle \tilde{\beta}, x - f(x) \cdot \tilde{\beta} \right\rangle = 0$$

وهذا يُكافئ، كوْن $f(x) = \langle \beta, x \rangle$ حيث $\beta = \frac{1}{\|\tilde{\beta}\|^2} \tilde{\beta}$. وهذا يثبت المطلوب.

VII.4-3. نتيجة : ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد، ولتزوّده بالنظيم الموافق للجداء السلمي. ولتزوّد E^* فضاء الأشكال الخطيّة على E بنظيم التطبيقات الخطيّة المستمرّة من E إلى $\mathbb{K}$. عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : E \to E^*, \ \beta \mapsto f_\beta$$

حيث $\forall x \in E, \ f_\beta(x) = \langle \beta, x \rangle$، تقابلاً نصف خطّي[d] محافظاً على النظيم.

الإثبات

إنّ Φ تقابلٌ بناءً على المبرهنة VII.4-1.

من ناحية أخرى، ليكن $(\alpha, \beta) \in E^2$، و $(t, s) \in \mathbb{K}^2$، و $x \in E$ عندئذ

$$\begin{aligned}\Phi(t\alpha + s\beta)(x) &= \langle t\alpha + s\beta, x \rangle = \bar{t}\langle \alpha, x \rangle + \bar{s}\langle \beta, x \rangle = \bar{t}\,\Phi(\alpha)(x) + \bar{s}\,\Phi(\beta)(x) \\ &= \left(\bar{t}\,\Phi(\alpha) + \bar{s}\,\Phi(\beta)\right)(x)\end{aligned}$$

---

[d] أي $\forall(\alpha, \beta) \in E^2, \ \forall(t, s) \in \mathbb{K}^2, \quad \Phi(t\alpha + s\beta) = \bar{t} \cdot \Phi(\alpha) + \bar{s} \cdot \Phi(\beta)$

وأخيراً، أياً كان $\beta \in E$، فلدينا

$$\| \Phi(\beta) \| = \| f_\beta \| = \sup \{ |\langle \beta, x \rangle| : \| x \| \leq 1 \} = \| \beta \|$$

وذلك بناءً على متراجحة شوارتز، وعلى حالة المساواة فيها. □

VII.4-4. ملاحظة: يمكن تعميم النتيجة السابقة، باستخدام الإثبات نفسه والملاحظة VII.4-2. على النحو التالي: ليكن $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ فضاء هيلبرت. وليكن H' فضاء الأشكال الخطيّة المستمرة على H، مزوّداً بنظيم التطبيقات الخطيّة المستمرّة. عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : H \to H', \beta \mapsto f_\beta$$

حيث $\forall x \in H,\ f_\beta(x) = \langle \beta, x \rangle$، تقابلاً نصف خطّي محافظاً على النظيم.

VII.4-5. مبرهنة وتعريف: ليكن $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle_E)$ و $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle_H)$ فضاءَي جداء سلّمي منتهيي البعد على الحقل نفسه. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى H، أي $u \in \mathcal{L}(E,H)$. عندئذ يوجد تطبيق خطّي وحيد: $u^* \in \mathcal{L}(H,E)$، نسميّه مُرافق التطبيق u، يُحقّق ما يلي:

$$\forall (x,y) \in E \times H, \quad \langle y, u(x) \rangle_H = \langle u^*(y), x \rangle_E$$

وإذا زوّدنا الفضاءات $\mathcal{L}(E,H)$ و $\mathcal{L}(H,E)$ و $\mathcal{L}(E,E)$ و $\mathcal{L}(H,H)$ بنظيم التطبيقات الخطيّة المستمرّة، صار لدينا

$$\forall u \in \mathcal{L}(E,H), \quad \| u \| = \| u^* \| = \sqrt{\| u \circ u^* \|} = \sqrt{\| u^* \circ u \|}$$

الإثبات

ليكن y عنصراً من H. لمّا كان التطبيق $x \mapsto \langle y, u(x) \rangle_H$ شكلاً خطيّاً على E، يوجد بمقتضى المبرهنة VII.4-1. عنصر وحيد $u^*(y)$ في E بحيث يكون

$$\forall x \in E, \quad \langle y, u(x) \rangle_H = \langle u^*(y), x \rangle_E$$

لنثبت إذن أنّ التطبيقَ $u^* : H \to E, y \mapsto u^*(y)$ تطبيقٌ خطّي.

في الحقيقة، أياً كان $(y,z) \in H^2$ ، و $(t,s) \in \mathbb{K}^2$ ، و $x \in E$ ، فإنّ

$$\begin{aligned}\left\langle u^*(\lambda y + \mu z), x\right\rangle_E &= \langle \lambda y + \mu z, u(x)\rangle_H \\ &= \overline{\lambda}\langle y, u(x)\rangle_H + \overline{\mu}\langle z, u(x)\rangle_H \\ &= \overline{\lambda}\left\langle u^*(y), x\right\rangle_E + \overline{\mu}\left\langle u^*(z), x\right\rangle_E \\ &= \left\langle \lambda u^*(y) + \mu u^*(z), x\right\rangle_E\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $u^*(\lambda y + \mu z) = \lambda u^*(y) + \mu u^*(z)$ ، وهذا يقتضي $u^* \in \mathcal{L}(H,E)$.

من ناحية أخرى، ليكن $u \in \mathcal{L}(E,H)$ ولنعرّف المجموعة الجزئية $\mathcal{A}$ من $\mathbb{R}_+$ بالعلاقة:

$$\mathcal{A} = \left\{ \left|\langle y, u(x)\rangle_H\right| : (\| x \|_E \le 1) \wedge (\| y \|_H \le 1) \right\}$$

ولنضع $a = \sup \mathcal{A}$. فيكون لدينا استناداً إلى متراجحة شوارتز وحالة المساواة فيها :

$$a = \sup_{\|x\|_E \le 1}\left(\sup_{\|y\|_H \le 1} \left|\langle y, u(x)\rangle_H\right| \right) = \sup_{\|x\|_E \le 1} \| u(x) \|_H = \| u \|$$

وبأسلوب مماثل يكون أيضاً لدينا

$$a = \sup_{\|y\|_H \le 1}\left(\sup_{\|x\|_E \le 1} \left|\left\langle u^*(y), x\right\rangle_E\right| \right) = \sup_{\|y\|_H \le 1} \left\| u^*(y) \right\|_E = \left\| u^* \right\|$$

وهذا ما يثبت أنّ $\| u \| = \left\| u^* \right\|$.

من ناحية أخرى، أياً كانت x في E فلدينا:

$$\begin{aligned}\| u(x) \|_H^2 = \langle u(x), u(x)\rangle_H &= \left\langle u^*(u(x)), x\right\rangle_E \le \left\| u^* \circ u(x) \right\|_E \| x \|_E \\ &\le \left\| u^* \circ u \right\| \cdot \| x \|_E^2\end{aligned}$$

ومن ثَمّ يكون $\| u \| \le \sqrt{\left\| u^* \circ u \right\|}$. ولكن لدينا أيضاً المتراجحة المعاكسة:

$$\left\| u^* \circ u \right\| \le \left\| u^* \right\| \cdot \| u \| = \| u \|^2$$

إذن $\| u \| = \sqrt{\left\| u^* \circ u \right\|}$. وبتطبيق ما أثبتناه على u^* وبملاحظة أنّ $(u^*)^* = u$ ، نجد

$$\left\| u^* \right\| = \sqrt{\left\| (u^*)^* \circ u^* \right\|} = \sqrt{\left\| u \circ u^* \right\|}$$

وبذلك يَكمُل الإثبات. □

VII.4-6. مبرهنة وتعريف: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ و $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ فضاءَي جداء سلّمي منتهيي البعد على الحقل نفسه. وليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ و $\mathcal{H}=(h_1,\ldots,h_m)$ أساسين متعامدين نظاميين لـ E و H على التوالي. وأخيراً ليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى H، أي u ∋ $\mathcal{L}(E,H)$. عندئذ يكون

$$\mathrm{mat}(u^*,\mathcal{H},\mathcal{E})=(\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{H}))^*$$

الإثبات

في الحقيقة، إذا كان $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{H})=(a_{ij})$ وكان $\mathrm{mat}(u^*,\mathcal{H},\mathcal{E})=(b_{ij})$، أمكن أن نعبِّر عن ثوابت هاتين المصفوفتين بدلالة الأساسين المتعامدين النظاميين على النحو الآتي:

$$b_{ij}=\left\langle e_i,u^*(h_j)\right\rangle_E \quad \text{و} \quad a_{ij}=\left\langle h_i,u(e_j)\right\rangle_H$$

ومن ثَم إذا استخدمنا خواص الجداء السلّمي وتعريف المرافق نجد

$$\overline{b_{ji}}=\overline{\left\langle e_j,u^*(h_i)\right\rangle_E}=\left\langle u^*(h_i),e_j\right\rangle_E=\left\langle h_i,u(e_j)\right\rangle_H=a_{ij}$$

وهذا هو المطلوب إثباته. □

تسمح لنا المبرهنة السابقة باستنتاج الخواص البسيطة التالية، التي نلخِّصها في المبرهنة التالية، علماً بأننا قد استخدمنا بعض الخواص سابقاً.

VII.4-7. مبرهنة : لتكن E و F و H ثلاثة فضاءات جداء سلّمي منتهية البُعد على الحقل نفسه. عندئذ:

- أياً كان u و v من $\mathcal{L}(E,F)$ و أياً كان λ ∋ $\mathbb{K}$ فإنّ $(\lambda u+v)^*=\overline{\lambda}\,u^*+v^*$.
- أياً كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ لدينا $(u^*)^*=u$.
- أياً كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ و أياً كان v من $\mathcal{L}(F,H)$ فلدينا $(v\circ u)^*=u^*\circ v^*$.
- وأخيراً إذا كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ قَلوباً كان u^* قَلوباً وكان $(u^*)^{-1}=(u^{-1})^*$.

VII.4-8. تعريف : ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد على الحقل $\mathbb{K}$.

- في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ، نسمّي كل تطبيق خطي u د $\mathcal{L}(E)$ يُحقّق الشرط $u^* = u$ تطبيقاً خطياً متناظراً.
- في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ، نسمّي كل تطبيق خطي u د $\mathcal{L}(E)$ يُحقّق الشرط $u^* = u$ تطبيقاً خطياً هرمتياً.
- ونقول عن تطبيق خطي u د $\mathcal{L}(E)$ إنه موجب إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان

$$u^* = u \qquad \circ\circ$$
$$\forall x \in E, \quad \langle x, u(x)\rangle \in \mathbb{R}_+ \qquad \circ\circ$$

- ونقول عن تطبيق خطي u د $\mathcal{L}(E)$ إنه معرّف وموجب إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان

$$u^* = u \qquad \circ\circ$$
$$\forall x \in E\backslash\{0\}, \quad \langle x, u(x)\rangle \in \mathbb{R}_+^* \qquad \circ\circ$$

- في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ، نسمّي كل تطبيق خطي u د $\mathcal{L}(E)$ يُحقّق الشرط $u^* = u^{-1}$ تطبيقاً خطياً متعامداً.
- في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ، نسمّي كل تطبيق خطي u د $\mathcal{L}(E)$ يُحقّق الشرط $u^* = u^{-1}$ تطبيقاً خطياً واحدياً.

VII.4-9. مثال : ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد. وليكن p د $\mathcal{L}(E)$ إسقاطاً قائماً، عندئذ يكون $p = p^*$. في الحقيقة، أياً كان (x,y) د E^2 فإنّ

$$\begin{aligned}\langle x, p(y)\rangle &= \langle x - p(x) + p(x), p(y)\rangle = \underbrace{\langle x - p(x), p(y)\rangle}_{\text{لـ}=0} + \langle p(x), p(y)\rangle \\ &= \langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), y + p(y) - y\rangle \\ &= -\underbrace{\langle p(x), y - p(y)\rangle}_{\text{لـ}=0} + \langle p(x), y\rangle \\ &= \langle p(x), y\rangle\end{aligned}$$

حيث استخدمنا كوْن الفضاءين الجزئيين $\operatorname{Im} p$ و $\ker p = \operatorname{Im}(I_E - p)$ متعامدين. وينتج من الحساب السابق

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad \langle p^*(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), y\rangle$$

وهذا بالطبع يكافئ $p^* = p$.

سنفترض في كلّ ما يأتي أنّ الحقل $\mathbb{K}$ هو حقل الأعداد الحقيقيّة.

VII.5. التطبيقات الخطيّة المتعامدة

VII.5-1. تعريف: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ و $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ فضاءَي جداء سلّمي على الحقل $\mathbb{R}$.
وليكن u و $\mathcal{L}(E,F)$. نقول إنّ u يحافظ على الجداء السلّمي إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall(x,y)\in E\times E,\quad \langle u(x),u(y)\rangle_F=\langle x,y\rangle_E$$

وهذا الشرط يُكافئ، بمقتضى المتطابقات القطبيّة، حفاظ u على النظيم أي

$$\forall x\in E,\quad \|u(x)\|_F=\|x\|_E$$

وأخيراً نقول إنّ u و $\mathcal{L}(E,F)$ تقابلٌ خطيّ محافظ على المسافة، إذا كان u تقابلاً خطياً،من جهة أولى، وكان يحافظ على الجداء السلّمي من جهة ثانية. و يلاحظ القارئ بسهولة أنّ كلّ تطبيق خطيّ u و $\mathcal{L}(E,F)$ محافظ على الجداء السلّمي يكون متبايناً.

VII.5-2. مبرهنة: ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ و $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ فضاءَي جداء سلّمي على الحقل $\mathbb{R}$.
نفترض أنهما منتهيي البُعد وأنّ $\dim E=\dim F$. ليكن u و $\mathcal{L}(E,F)$. عندئذ تكون الخواص التالية متكافئة:

1. التطبيق u يحافظ على الجداء السلّمي.
2. التطبيق u تقابلٌ خطيّ محافظ على المسافة.
3. صورة كلّ أساس متعامد نظاميّ في E هي أساس متعامد نظاميّ في F.
4. يوجد أساس متعامد نظاميّ في E بحيث تكون صورته أساساً متعامداً نظاميّاً في F.

الإثبات

إنّ إثبات هذه المبرهنة، أمر ميسور جداً انطلاقاً من التعريف، ونترك تفاصيله للقارئ. □

ليكن E فضاء إقليدياً، أي فضاء جداء سلّمي منتهي البُعد على الحقل $\mathbb{R}$. ينتج من التعريف والمبرهنة السابقين، أنّ تطبيقاً خطياً u من $\mathcal{L}(E)$ يكون متعامداً، أي يُحقّق $u^* = u^{-1}$، إذا وفقط إذا كان محافظاً على الجداء السلّمي. تكوّن مجموعة التطبيقات الخطية المتعامدة، زمرة بالنسبة إلى تركيب التطبيقات، نرمز إليها بالرمز $O(E)$، ونسمّيها الزمرة المتعامدة.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad u \in O(E) \Leftrightarrow u^* \circ u = I_E$$
$$\Leftrightarrow u \circ u^* = I_E$$

وتكون الزمرة المتعامدة $(O(E),\circ)$ زمرة جزئية من الزمرة الخطيّة $(\mathcal{GL}(E),\circ)$. ونشير إلى أنّ التعريف السابق يقتضي وضوحاً : $\forall u \in O(E), \det u \in \{-1,+1\}$، ولكنّ العكس خطأ. ولّما كان $u \mapsto \det u$ يُعرِّف تشاكلاً زمرياً بين $O(E)$ و $\{-1,+1\}$ كانت نواة هذا التشاكل أي $\{u \in O(E), \det u = 1\}$ زمرة جزئيّة من $O(E)$ نسمّيها زمرة الدورانات ونرمز إليها بالرمز $O^+(E)$، ونرمز عادة بالرمز $O^-(E)$ إلى المجموعة $O(E)\backslash O^+(E)$ وهي بالطبع ليست زمرة.

يمكننا إسقاط الملاحظة السابقة على المصفوفات الحقيقية المربّعة، فنرمز بالرمز $O(n)$ إلى مجموعة المصفوفات A في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقّق $^tA\,A = I_n$ أو الشرط المُكافئ $A\,^tA = I_n$. وهي، مزوّدة بقانون ضرب المصفوفات، تكوّن زمرة جزئيّة من زمرة المصفوفات الحقيقية المربعة القَلوبة من المرتبة n : $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. ونعرّف بأسلوب مماثل لما سبق $O^+(n)$، و $O^-(n)$.

وأخيراً إذا كان E فضاءً إقليدياً، بُعده n، وكان $\mathcal{E} = (e_1,\ldots e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً لـ E، كان التطبيق : $\Phi : O(E) \to O(n), u \mapsto \mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$ تشاكلاً تقابلياً زُمرياً.

<u>تسمح لنا الدراسة السابقة بتعريف توجيه لفضاء إقليدي:</u>

ليكن E فضاءً إقليدياً، بُعده n، ولنرمز بالرمز $\mathcal{BON}(E)$ إلى مجموعة الأسس المتعامدة النظاميّة للفضاء E. فإذا كان $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ و $\mathcal{E}' = (e'_1,\ldots,e'_n)$ عنصرين من $\mathcal{BON}(E)$، عرّفنا التطبيق الخطّي المتعامد الوحيد $U_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ بالشرط :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad U_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(e_k) = e'_k$$

يسمح لنا هذا بتعريف علاقة ثنائيّة $\mathfrak{R}$ على المجموعة $\mathcal{BON}(E)$، على النحو الآتي :

$$\mathcal{E}\,\mathfrak{R}\,\mathcal{E}' \Leftrightarrow \det(U_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}) = 1 \Leftrightarrow U_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} \in O^+(E)$$

ونتحقّق بسهولة أنّ $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathcal{BON}(E)$:

- فهي انعكاسيّة لأنّ $U_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = I_E$ ، أياً كان $\mathcal{E}$ من $\mathcal{BON}(E)$.
- وهي تناظرية لأن $U_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} = (U_{\mathcal{E},\mathcal{E}'})^{-1}$ ، أياً كان $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}'$ من $\mathcal{BON}(E)$.
- وأخيراً هي متعدّية لأن $U_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = U_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \circ U_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ ، أياً كان $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ من $\mathcal{BON}(E)$.

وأخيراً، إنّ لهذه العلاقة صفّي تكافؤ اثنين فقط. ذلك لأنّه إذا كان $\mathcal{E}^{+} = (e_1,\dots,e_n)$ عنصراً ما من $\mathcal{BON}(E)$ ، وعرّفنا $\mathcal{E}^{-} = (-e_1,\dots,e_n)$ ، كان

$$\mathcal{BON}(E)/\Re = \{[\mathcal{E}^{+}],[\mathcal{E}^{-}]\}$$

في الحقيقة، لمّا كان $\det(U_{\mathcal{E}^{+},\mathcal{E}^{-}}) = -1$ ، كان $[\mathcal{E}^{-}] \neq [\mathcal{E}^{+}]$ ، هذا من جهة أولى. ومن جهة ثانية، إذا كان $\mathcal{F}$ عنصراً ما من $\mathcal{BON}(E)$ ، نتج من العلاقة

$$U_{\mathcal{E}^{-},\mathcal{F}} \circ U_{\mathcal{E}^{+},\mathcal{E}^{-}} = U_{\mathcal{E}^{+},\mathcal{F}}$$

أنّ $\det(U_{\mathcal{E}^{-},\mathcal{F}}) = -\det(U_{\mathcal{E}^{+},\mathcal{F}})$. فإمّا أن يكون $\det(U_{\mathcal{E}^{+},\mathcal{F}}) = 1$ ومن ثَم $\mathcal{F} \in [\mathcal{E}^{+}]$ ، أو أن يكون $\det(U_{\mathcal{E}^{-},\mathcal{F}}) = 1$ ، وهذا يقتضي $\mathcal{F} \in [\mathcal{E}^{-}]$. أي إنّ $[\mathcal{F}] \in \{[\mathcal{E}^{+}],[\mathcal{E}^{-}]\}$.

نسمّي صفّي التكافؤ، في $\mathcal{BON}(E)/\Re$ ، توجيهين للفضاء الإقليدي E . ويكون توجيه الفضاء الإقليدي E ، هو اختيار أحد التوجيهين السابقين، أي اختيار أساس متعامد نظاميّ $\mathcal{E}$ من $\mathcal{BON}(E)$. فنسمّي $[\mathcal{E}]$ توجيهاً مباشراً ونسمي صفّ التكافؤ الثاني توجيهاً رجعياً أو غير مباشر. ونسمي عناصر $[\mathcal{E}]$ أسساً متعامدة نظاميّة مباشرة.

.3.5.VII مثال: لندرس الزمرة $O(2)$.

تكون المصفوفة المربّعة $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ متعامدة إذا وفقط إذا كان ${}^tM M = I_2$ ، وهذا يُكافئ الشرطين :

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \qquad (٥)$$

$$ac + bd = 0 \qquad (٦)$$

ينتج من (٥) أنّه يوجد عددان حقيقيّان (θ,φ) في $\mathbb{R}^2$ بحيث

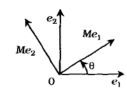
$$(a,b) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{و} \quad (c,d) = (\sin\varphi, \cos\varphi)$$

وينتج من العلاقة (∇) أنّ

$$\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi = \sin(\theta+\varphi) = 0$$

وهذا يُعطي حلّين للمسألة: $\varphi \in (-\theta + 2\pi Z)$ أو $\varphi \in (\pi - \theta + 2\pi Z)$. إذن للمصفوفة M أحد الشكلين الآتيين:

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \text{ أو } R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



إذا كانت $M = R_\theta$ كان $\det M = +1$، فهي إذن مصفوفة دوران أي $M \in O^+(2)$، وهي تُمثّل هندسياً الدوران بزاوية θ حول المبدأ O، أي الذي مركزه O.

أمّا إذا كانت $M = S_\theta$ فيكون $\det M = -1$، ويكون كثير الحدود المميّز لـ M هو $X^2 - 1$ ومن ثَمّ $\mathrm{sp}(M) = \{-1,+1\}$، و يكوّن الشعاعان $u_1 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ و $u_2 = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ أساساً متعامداً نظامياً للفضاء الإقليديّ المألوف $M_{2\times1}(\mathrm{IR})$، مؤلّفاً من أشعة ذاتيّة للمصفوفة M. أي $Mu_1 = u_1$، و $Mu_2 = -u_2$. فهي تُمثّل هندسياً التناظر القائم حول المستقيم الشعاعي الموجّه بالشعاع u_1 أي $\mathrm{IR}u_1$.

VII.4.5. مثال: الجداء الخارجي والجداء المختلط في فضاء إقليدي ثلاثيّ البُعد.

ليكن E فضاءً إقليدياً موجّهاً بُعده 3. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$، و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ أساسين متعامدين نظاميين مباشرين في E. لمّا كان بُعد فضاء الأشكال الـ 3- خطيّة المتناوبة هو 1، يوجد عدد $\lambda \in \mathrm{IR}$، بحيث $\det_{\mathcal{E}} = \lambda \det_{\mathcal{F}}$، ومن ثَمّ

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(f_1, f_2, f_3) = \det U_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = 1.$$

نستنتج من ذلك أنّ $\det_{\mathcal{E}} = \det_{\mathcal{F}}$.

تسمح لنا الملاحظة السابقة أن نستنتج الخاصّة التالية:

ليكن E فضاءً إقليدياً موجّهاً بُعده 3 . يوجد شكلٌ ثلاثيُّ الخطية متناوبٌ وحيدٌ δ_E على E يُحقّق $\delta_E = \det_{\mathcal{E}}$ أياً كان الأساس المتعامد النظامي المباشر $\mathcal{E}$ للفضاء الإقليدي الموجّه E، نسمّي δ_E الجداء المختلط على E .

ونستخدم الرمز $[x_1, x_2, x_3]$ دلالة على $\delta_E(x_1, x_2, x_3)$. فيكون

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in E^3, \quad [x_1, x_2, x_3] = \det_{\mathcal{E}}(x_1, x_2, x_3) \qquad ❶$$

حيث $\mathcal{E}$ أساس متعامد نظامي مباشر ما للفضاء E .

ليكن E فضاءً إقليدياً موجّهاً بُعده 3 . وليكن v_1 و v_2 شعاعين من E . لمّا كان التطبيق $E \to \mathbb{R}, x \mapsto [v_1, v_2, x]$ شكلاً خطياً على E، نعلم أنّه يوجد شعاع وحيد، نرمز إليه بالرمز $v_1 \wedge v_2$ و $E \ni$، بحيث

$$\forall x \in E, \quad [v_1, v_2, x] = \langle v_1 \wedge v_2, x \rangle \qquad ❷$$

نسمّي الشعاع $v_1 \wedge v_2$ الجداء الشعاعيّ لـ v_1 و v_2 بهذا الترتيب.

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ أساساً متعامداً نظامياً مباشراً ما لـ E . ولنفترض أنّ

$$v_2 = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3 \quad \text{و} \quad v_1 = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \zeta_3 e_3$$

عندئذ، أياً كان الشعاع $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ من E، نجد بنشر المحدّد وفق العمود الأخير:

$$[v_1, v_2, x] = \det \begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 & \alpha_1 \\ \zeta_2 & \eta_2 & \alpha_2 \\ \zeta_3 & \eta_3 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \det \begin{bmatrix} \zeta_2 & \eta_2 \\ \zeta_3 & \eta_3 \end{bmatrix} - \alpha_2 \det \begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 \\ \zeta_3 & \eta_3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \det \begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 \\ \zeta_2 & \eta_2 \end{bmatrix}$$

وهذا يبيّن أنّ

$$v_1 \wedge v_2 = (\zeta_2 \eta_3 - \zeta_3 \eta_2) e_1 + (\zeta_3 \eta_1 - \zeta_1 \eta_3) e_2 + (\zeta_1 \eta_2 - \zeta_2 \eta_1) e_3$$

ويعطينا طريقة عمليّة لحساب الجداء الشعاعيّ.

نلاحظ من التعريف ❷ أنّ الشعاع $v_1 \wedge v_2$ عمودي على كلٍ من v_1 و v_2 . ونترك للقارئ أن يتحقّق صحةَ المتطابقة المهمّة التالية والمعروفة باسم متطابقة Lagrange

$$\| v_1 \wedge v_2 \|^2 + \left| \langle v_1, v_2 \rangle \right|^2 = \| v_1 \|^2 \cdot \| v_2 \|^2$$

والتي ينتج منها أنّ

$$.\|v_1 \wedge v_2\| = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \sin(x_1 \hat{,} x_2)$$

يُحقّق الجداءان الشعاعي والمختلط الخواص التالية:

1. $(\lambda a + b) \wedge c = \lambda(a \wedge c) + (b \wedge c)$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (a,b,c) \in E^3$
2. $a \wedge b = -(b \wedge a)$ $\quad \forall (a,b) \in E^3,$
3. $a \wedge (b \wedge c) = \langle a,c \rangle b - \langle a,b \rangle c$ $\quad \forall (a,b,c) \in E^3,$
4. $a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = 0$ $\quad \forall (a,b,c) \in E^3,$
5. $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = [a,b,c]a$ $\quad \forall (a,b,c) \in E^3,$
6. $[a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a) = [a,b,c]^2$ $\quad \forall (a,b,c) \in E^3,$

وأخيراً، إذا كان a و b شعاعين من E بحيث $a \neq 0$، فإنّ الشرط اللازم والكافي حتى يوجد شعاع x في E يُحقّق $a \wedge x = b$ هو أن يكون $a \perp b$، وفي هذه الحالة تكون مجموعة حلول المعادلة $a \wedge x = b$ هي

$$.\left\{ \frac{1}{\|a\|^2} b \wedge a + \lambda a : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

سننهي هذه الفقرة بالمبرهنة التالية، التي تعطي تفريقاً للمصفوفات المربّعة مهمّاً في بعض مسائل التحليل العددي:

VII.5-5. مبرهنة:-تفريق Iwasawa- لتكن M في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، مصفوفة قَلوبة. عندئذ توجد ثنائية وحيدة (O,T) حيث O مصفوفة متعامدة من المرتبة n، و T مصفوفة مثلّثيّة عليا، عناصر قطرها الأساسي موجبة تماماً، بحيث $M = OT$.

الإثبات

لنعرّف $G={}^tMM$، فتكون G مصفوفة معرّفة موجبة عملاً بالملاحظة VII.2-11. إذن نجد استناداً إلى تفريق Cholesky، (انظر المبرهنة VII.2-10.) مصفوفةً مثلّثيّة عليا T، عناصر قطرها الأساسي موجبة تماماً، بحيث $G={}^tMM={}^tTT$. ومن ثمّ يكون $M = OT$ حيث عرّفنا المصفوفة O بالعلاقة $O = ({}^tM)^{-1}\ {}^tT = {}^t(TM^{-1})$.

بقي أن نثبتَ أنّ O في $O(n)$، ولكنّه أمر واضح لأنّ المساواة ${}^tMM={}^tTT$ تقتضي :

$$O = MT^{-1} = (TM^{-1})^{-1} = ({}^tO)^{-1}$$

بذلك نكون قد أثبتنا الشق المتعلّق بوجود التفريق من المبرهنة. لنثبت إذن الوحدانيـــة. لنفترض أنّ $M = OT = O'T'$ ، حيث تُحقّق الثنائيتان (O,T) و (O',T') شروط المبرهنـــة. عندئذ يكون $TT'^{-1} = {}^tOO'$ ، أي تكون المصفوفة $TT'^{-1} = D$ مصفوفةً مثلّثيّة عليا ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً، وهي أيضاً مصفوفة متعامدة : $D \in O(n)$. هذا يقتضي بالطبع أن يكون $D = I_n$ ، أي $T = T'$ ، ومن ثَم $O = O'$. □

6.VII. اختزال التطبيقات الخطيّة المتناظرة

في كامل هذه الفقرة، يمثّل E فضاءً إقليدياً بُعدُه $n \in \mathbb{N}^*$.

1-6.VII. مبرهنة: ليكن u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ تتحقّق الخواص التالية:

1. إذا كان F فضاءً شعاعيّاً جزئياً من E ، يُحقّق $u(F) \subset F$ ، كان $u(F^\perp) \subset F^\perp$.
2. إذا كانت λ و μ قيمتين ذاتيتين مختلفتين لـــ u ، كان الفضاءان الجزئيان الذاتيان $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$ و $E_\mu = \ker(u - \mu I_E)$ متعامدين : $E_\lambda \perp E_\mu$.
3. إنّ طيف u غير خال : $\mathrm{sp}(u) \neq \varnothing$ ، أي إنّ للتطبيق الخطيّ u قيمة ذاتية واحدة على الأقل.

الإثبات

1. لتكن $x \in F^\perp$. عندئذ، أياً كان $z \in F$ ،

$$\langle u(x), z\rangle = \langle x, u^*(z)\rangle \overset{u=u^*}{=} \langle \underset{F^\perp \ni}{x}, \underset{F \ni}{u(z)}\rangle = 0$$

إذن $u(x) \in F^\perp$. وهذا ما يُثبت أنّ $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

2. لتكن $(x,y) \in E_\lambda \times E_\mu$. عندئذ يكون

$$\lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle \overset{x\in E_\lambda}{=} \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle \overset{u=u^*}{=} \langle x, u(y)\rangle \overset{y\in E_\mu}{=} \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x,y\rangle$$

وهذا يقتضي $\langle x,y\rangle = 0$ لأنّ $\lambda \neq \mu$.

3. لتكن المجموعة الجزئية $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ من E. إنها مجموعة مغلقة ومحدودة في الفضاء الشعاعيّ المنظّم E، فهي إذن مجموعة متراصّة لأن بُعد E منته. ومن ثَـمّ فـإن استمرار التابع الحقيقي:

$$\varphi : S \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle u(x), x \rangle$$

على هذه المجموعة المتراصّة يجعله يبلغ حدّه الأعلى عليها، أي يوجد عنصر x_0 في S بحيث

$$\lambda = \varphi(x_0) = \max_{x \in S} \varphi(x)$$

ويكون لدينا، بناءً على تعريف λ،

$$\forall y \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \langle u(x_0 + ty), x_0 + ty \rangle \le \lambda \|x_0 + ty\|^2$$

لأنه في حالة $x_0 + ty \neq 0$ يكون الشعاع $z = \frac{1}{\|x_0 + ty\|}(x_0 + ty)$ عنصراً من S. وينتـج من نشر المتراجحة السابقة أنه

$$\forall y \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 (\lambda \|y\|^2 - \langle u(y), y \rangle) + 2t (\lambda \langle x_0, y \rangle - \langle u(x_0), y \rangle) \ge 0$$

وينجم عن ذلك أنّ أمثال t معدومة، أي

$$\forall y \in E, \quad \lambda \langle x_0, y \rangle - \langle u(x_0), y \rangle = \langle \lambda x_0 - u(x_0), y \rangle = 0$$

وهذا يقتضي $u(x_0) = \lambda x_0$، ومن ثَمّ يكون λ في $\mathrm{sp}(u)$ لأنّ $x_0 \neq 0$. □

2-6.VII. ملاحظة: إذا كان u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. كان $-u$ تطبيقاً خطيّاً متناظراً أيضاً، وينتج من الإثبات السابق أنّ كلاً من العددين

$$\Lambda_{min} = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle \quad \text{و} \quad \Lambda_{max} = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle$$

عنصر من $\mathrm{sp}(u)$. ومن جهة أخرى، تتحقّق دوماً المتراجحة

$$\forall \mu \in \mathrm{sp}(u), \quad \Lambda_{\min} \le \mu \le \Lambda_{\max}$$

تسمح لنا هذه الملاحظة أن نستنتج أنّ $\Lambda_{\min} = \min \mathrm{sp}(u)$ و $\Lambda_{\max} = \max \mathrm{sp}(u)$. ومنه

$$\min \mathrm{sp}(u) = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle \quad \text{و} \quad \max \mathrm{sp}(u) = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle$$

VII.6-3. مبرهنة: -التحليل الطيفي- ليكن u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. نرمز، أياً كان $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$، بالرمز P_λ إلى الإسقاط القائم لـ E على الفضاء الجزئي الذاتي الموافق لـ λ: $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$. عندئذ تتحقّق الخواص التالية:

1°. $\forall(\lambda,\mu) \in (\mathrm{sp}(u))^2, \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow P_\lambda \circ P_\mu = 0$

2°. $I_E = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} P_\lambda$

3°. $u = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \lambda \cdot P_\lambda$

وتسمّى الجماعة $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)}$ تحليلاً طيفيّاً لـ u، وهي وحيدة بالمعنى الآتي : إذا كانت Λ مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}$، وكانت $(Q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ جماعة من الإسقاطات القائمة وغير المعدومة من $\mathcal{L}(E)$، بحيث تتحقّق الخواص:

1'°. $\forall(\lambda,\mu) \in \Lambda^2, \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow Q_\lambda \circ Q_\mu = 0$

2'°. $I_E = \sum_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$

3'°. $u = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda \cdot Q_\lambda$

عندئذ لابُدّ أن يكون $\Lambda = \mathrm{sp}(u)$ و $\forall \lambda \in \Lambda, Q_\lambda = P_\lambda$.

وأخيراً، إذا كان $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$، وعرّفنا كثير الحدود $\ell_\lambda(X) = \prod_{\mu \in \mathrm{sp}(u)\setminus\{\lambda\}} \frac{X-\mu}{\lambda-\mu}$ من $\mathbb{R}[X]$ كان $P_\lambda = \ell_\lambda(u)$.

الإثبات

لنثبت أولاً أنّ الجماعة $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)}$ تُحقّق الخواص 1°. و 2°. و 3°.

- لتكن $(\lambda,\mu) \in (\mathrm{sp}(u))^2$ بحيث $\lambda \neq \mu$. عندئذ استناداً إلى المبرهنة VII.6-1.، يكون $E_\lambda \perp E_\mu$ ومنه $\mathrm{Im}\, P_\mu = E_\mu \subset E_\lambda^\perp = \ker P_\lambda$. وهذا يقتضي $P_\lambda \circ P_\mu = 0$.

- من ناحية أخرى، لنعرّف $F = \overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda$، فيكون لدينا وضوحاً $u(F) \subset F$، ومن ثَمّ $u(F^\perp) \subset F^\perp$، بناءً على المبرهنة VII.6-1.

لنفترض جدلاً أنّ $E \neq F$ أي $F^\perp \neq \{0\}$، ولنتأمّل التطبيق الخطّي

$$v = u_{\|F^\perp} : F^\perp \to F^\perp, x \mapsto u(x)$$

نتحقّق بسهولة أنّ v تطبيق خطيّ متناظر من $\mathcal{L}(F^{\perp})$ ، إذن $\mathrm{sp}(v) \neq \varnothing$. أي يوجـــد $\lambda_0 \ni \mathrm{sp}(v)$ و يوجد عنصر x في $F^{\perp}$ يكون شعاعاً ذاتياً لـــ v موافقاً للقيمة الذاتيّـــة λ_0 . أي $x \neq 0$ و $u(x) = v(x) = \lambda_0\, x$ ، ومنه

$$x \in E_{\lambda_0} \cap (F^{\perp}) \subset E_{\lambda_0} \cap (E_{\lambda_0}^{\perp}) = \{0\} \text{ و } x \neq 0 .$$

يُثبت هذا التناقض، أنّ $E = F$. أي إنّ

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)}} E_{\lambda}$$

فإذا كانت x في E ، أمكن أن نكتبها بطريقة وحيدة بالشكل $x = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} x_{\lambda}$ حيـــث x_{λ} في E_{λ} . وتبيِّن الخاصّة °1 . أنّ

$$\forall (\lambda, \mu) \in (\mathrm{sp}(u))^2, \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow P_{\lambda}(x_{\mu}) = P_{\lambda} \circ P_{\mu}(x_{\mu})) = 0$$

وهذا يقتضي، انطلاقاً من المساواة : $x = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} x_{\lambda}$ ، أن يكون

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u), \quad P_{\lambda}(x) = x_{\lambda}$$

ومن ثَمّ يكون $x = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} P_{\lambda}(x)$. وهذه هي الخاصّة °2.

- وأخيراً، لّما كان $E_{\lambda} = \ker(u - \lambda I_E)$ ، نتج أنّ

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u), \quad u \circ P_{\lambda} = \lambda \cdot P_{\lambda}$$

ومنه

$$u = u \circ I_E = u \circ \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} P_{\lambda} \right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} u \circ P_{\lambda} = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \lambda \cdot P_{\lambda}$$

وهذه هي الخاصّة °3.

لنأتِ إلى إثبات الوحدانيّة :

نبدأ بتعريف الفضاءات الشعاعية الجزئية من E : $F_{\lambda} = \operatorname{Im} Q_{\lambda}$ حيث λ في Λ ، وهي جميعاً غير تافهة، أي لا تساوي $\{0\}$ ، لأنّ $\forall \lambda \in \Lambda,\ Q_{\lambda} \neq 0$.

ليكن λ في Λ ، وليكن x عنصراً من $F_{\lambda} \cap \left(\sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} F_{\mu} \right)$ إذن

$$x \ni F_{\lambda} \text{ و } x = \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} x_{\mu} \text{ حيث } x_{\mu} \ni F_{\mu},\ \forall \mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\} .$$

وبالاعتماد على الخاصّة '1°. يكون

$$x = \mathcal{Q}_\lambda(x) = \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \mathcal{Q}_\lambda(x_\mu) = \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \mathcal{Q}_\lambda \circ \mathcal{Q}_\mu(x_\mu) = 0$$

بذا نكون قد أثبتنا أنّ $\forall \lambda \in \Lambda, \quad F_\lambda \cap \left(\sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} F_\mu \right) = \{0\}$. فالمجموع $\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ مباشر.

ومن جهة أخرى، تُبيّن الخاصّة '2°. أنّ $E = \sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$. إذن

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda .$$

لتكن $\lambda \in \Lambda$ ، نجد اعتماداً على الخاصّتين '1°. و '3°. أنّ $\forall x \in F_\lambda, u(x) = \lambda x$ ،

وهذا يقتضي $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ ، و $F_\lambda \subset E_\lambda$. إذن

$$\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \subset E_\lambda \quad \text{و} \quad \Lambda \subset \mathrm{sp}(u)$$

ومن ثَم

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim F_\lambda \overset{\triangledown}{\leq} \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim E_\lambda \overset{\diamond}{\leq} \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \dim E_\lambda = \dim E$$

نستنتج من ذلك أنّه لا بُدّ أن تكون هنالك مساواة في جميع المتراجحات السابقة : المساواة $(\diamond)$ تقتضي $\Lambda = \mathrm{sp}(u)$ ، والمساواة $(\triangledown)$ تقتضي $\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda = E_\lambda$. وهذا يُثبت الوحدانيّة.

أخيراً، ينجم عن 1°. و 3°. ما يلي :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u^k = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \lambda^k \cdot P_\lambda$$

وهذه المساواة صحيحة أيضاً حين يكون $k = 0$ بناءً على 2°. ومنه نجد

$$\forall S \in \mathbb{R}[X], \quad S(u) = \sum_{\mu \in \mathrm{sp}(u)} S(\mu) \cdot P_\mu$$

وبوجه خاص نجد بأخذ $S = \ell_\lambda(X)$ أنّ

$$\ell_\lambda(u) = \sum_{\mu \in \mathrm{sp}(u)} \ell_\mu(\lambda) \cdot P_\mu = \sum_{\mu \in \mathrm{sp}(u)} \delta_{\mu,\lambda} \cdot P_\mu = P_\lambda$$

وبهذا يكتمل البرهان. □

VII.6-4. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يوجد أساس متعامد نظاميّ $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ لـ E بحيث تكون المصفوفة $\text{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$ قطرية.

الإثبات

لنتأمّل، أياً كانت λ في $\text{sp}(u)$ ، الفضاء الذاتيّ $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$. عندئذ يكـون لدينا، استناداً إلى المبرهنة السابقة:

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)}} E_\lambda$$

ونحصل على الأساس المتعامد النظامي المطلوب بأن نختار، أياً كانت λ في $\text{sp}(u)$ ، أساساً متعامداً نظامياً $\mathcal{E}_\lambda$ لـ E_λ ، ومن ثَمّ نضع $\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda \in \text{sp}(u)} \mathcal{E}_\lambda$. □

يمكننا ترجمةُ النتيجة السابقة إلى لغة المصفوفات فنحصل على النتيجة التالية:

VII.6-5. نتيجة: لتكن A في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة. عندئذ توجـد مصفوفـة متعامـدة O في $\mathcal{O}(n)$ ، وتوجد مصفوفة قطريّة D في $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ، بحيث

$$A = O\,D\,{}^tO$$

وأخيراً نختتم هذا البحث بالخاصتين التاليتين تاركين إثباتهما البسيط تمريناً للقارئ.

VII.6-6. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ يتحقّق التكافؤان التاليان:

- ❖ u موجب $\Leftrightarrow \text{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- ❖ u معرّف موجب $\Leftrightarrow \text{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

VII.6-7. نتيجة: ليكن u تطبيقاً خطيّاً متناظراً من $\mathcal{L}(E)$ ، ولنزوّد $\mathcal{L}(E)$ بنظيم التطبيقات الخطّية المستمرة. عندئذ يكون

$$\|u\| = \max_{\lambda \in \text{sp}(u)} |\lambda| = \max(-\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max})$$

حيث

$$\Lambda_{\min} = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle = \min \text{sp}(u)$$

و

$$\Lambda_{\max} = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle = \max \text{sp}(u)$$

تمرينات

التمرين 1. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي، ولتكن $(e_1,\dots,e_n)$ جملة أشعة من E تُحقق الشرطين:

1. $\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \|e_i\| = 1$
2. $\forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2$

أثبت أن الجملة $(e_1,\dots,e_n)$ أساسٌ متعامدٌ نظامي للفضاء E.

التمرين 2. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي، ولتكن $(x_1,\dots,x_n)$ جملة أشعة من E.

1. أثبت أنّ $\sum_{i<j} \|x_i - x_j\|^2 = n\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2$.
2. نفترض أنّ $\|x_i\| \le R$ أياً كان i في $\mathbb{N}_n$. وأنّ $\|x_i - x_j\| \ge 2$ أياً كان (i,j) في $\mathbb{N}_n^2$ بحيث $i \ne j$. أثبت أنّ $\sqrt{2(n-1)/n} \le R$. هل هذه أفضل نتيجة ممكنة ؟

التمرين 3. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي. نذكّر بأنّ $\overline{B}(0,r)$ هي الكرة المغلقة التي مركزها 0 ونصف قطرها $0 < r$، وإذا كان (x,y) في E^2 فإنّنا نعرّف

$$[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}.$$

ليكن (a,b) في $(\mathbb{R}_+)^2$ أثبت أنّ

$$\left([x,y] \subset \overline{B}(0,a+b) \setminus \overline{B}(0,a)\right) \Rightarrow \|x-y\| \le 2\sqrt{b^2 + 2ba}.$$

التمرين 4. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ و $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ فضاءَي جداء سلمي على الحقل نفسه. وليكن $f : E \to F$ تطبيقاً يحقق الشرطين:

$$f(0) = 0 \quad \text{و} \quad \forall (x,y) \in E \times E, \quad \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E.$$

أثبت أنّ التطبيق f خطّي. (اعتبر منتصف القطعة $[x,y]$).

التمرين 5. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي. أياً كان $(x,y)\in E\times E$ نضع

$$d(x,y)=\frac{\|x-y\|}{\sqrt{1+\|x\|^2}\ \sqrt{1+\|y\|^2}}$$

نريد أنّ نثبتَ أنّ $\forall(x,y,z)\in E^3,\ \ d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$.

1. أثبت أنّ $\forall(\lambda,\mu)\in \mathbb{K}^2, \forall(u,v)\in E^2,\quad \|u\|=\|v\|=1\Rightarrow \|\lambda u-\mu v\|=\|\lambda v-\mu u\|$.
2. أثبت أنّ $\left\|\frac{y}{\|y\|^2}-\frac{x}{\|x\|^2}\right\|=\frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}$ $\forall(x,y)\in\left(E\setminus\{0\}\right)^2,$.
3. نتأمّل الفضاء $\widetilde{E}=E\times\mathbb{K}$ مزوداً بالجداء السلمي $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\widetilde{E}}$ المعرف كما يلي:

$$\langle(x,\alpha),(y,\beta)\rangle_{\widetilde{E}}=\langle x,y\rangle+\overline{\alpha}\,\beta$$ ،

كما نتأمّل التطبيق $f:E\to\widetilde{E},\ x\mapsto(x,1)$. عبّر عن $d(x,y)$ بدلالة $f(x)$ و $f(y)$ ثمّ استنتج المطلوب.

التمرين 6. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء الجداء السلمي $\mathbb{R}[X]$ مزوداً بالجداء السلمي

$$\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$.

عيّن الإسقاط القائم لـ E على الفضاء الشعاعي الجزئي F المؤلف من كثيرات الحدود التي لا تزيد درجتها عن 3 وتقبل 0 و 1 جذوراً لها. ثمّ احسب مسافة X^n عن F .

التمرين 7. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي، وليكن $(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً متعامداً نظامياً لـ E . ولتكن $(x_1,\ldots,x_n)$ جملة أشعة من E تحقق $\sum_{k=1}^{n}\|e_k-x_k\|^2<1$. أثبت أن الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ أساس للفضاء E .

التمرين 8. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي على الحقل $\mathbb{R}$، ولتكن $(e_1,\ldots,e_n)$ جملة أشعة من E . نفترض أنّ

- $\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad i\ne j\Rightarrow\langle e_i,e_j\rangle<0$.
- $\exists x\in E,\quad \forall i\in\mathbb{N}_n,\quad \langle x,e_i\rangle>0$.

أثبت أنّ الجملة $(e_1,\ldots,e_n)$ حرة.

التمرين 9. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي. وليكن p إسقاطاً على E، أي تطبيقاً خطياً يحقق $p^2 = p$، أثبت تكافؤ الخواص التالية:

1. التطبيق p هو إسقاط قائم.
2. $p^* = p$.
3. $\ker p \subset (\mathrm{Im} p)^{\perp}$.
4. $\forall x \in E, \|p(x)\| \le \|x\|$.

التمرين 10. لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة موجبة من المرتبة n. أثبت أنّ

$$\forall (X,Y) \in (M_{n\times 1}(\mathbb{K}))^2, \left|X^* A Y\right|^2 \le (X^* A X)(Y^* A Y)$$

واستنتج أنّ $\sup\limits_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}| = \sup\limits_{1\le i\le n} a_{ii}$.

التمرين 11. لتكن A_1 و A_2 مصفوفتين هرمتيّتين من المرتبة n. أثبت أنّ A_1A_2 هرمتيّة إذا، وفقط إذا، كان $A_1A_2 = A_2A_1$.

التمرين 12. لتكن $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. نضع $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_3 + i\lambda_4 \\ \lambda_3 - i\lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}$. أثبت أنه إذا كان $0 < \lambda_1$ و $1 = \det(A)$ كانت المصفوفة A معرّفة موجبة.

التمرين 13. لتكن $O = (a_{ij})$ مصفوفة متعامدة من المرتبة n. أثبت المتراجحتين:

$$\sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \le n\sqrt{n} \quad \text{و} \quad \left|\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\right| \le n.$$

التمرين 14. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البُعد، و P إسقاط عمودي على E، و $(e_1,\ldots,e_n)$ أساس متعامد نظامي في E. أثبت أنّ $\sum_{k=1}^{n} \|P(e_k)\|^2 = \mathrm{rg}(P)$.

التمرين 15. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البُعد، وليكن $T \in \mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ $(\mathrm{Im}\, T)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, T^*$ و أنّ $(\mathrm{Ker}\, T)^{\perp} = \mathrm{Im}\, T^*$.

التمرين 16. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاءً إقليدياً.

1. ليكن $u \in \mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ تطبيق الخطيّ u^*u متناظر و قيمه الذاتية موجبة. سنرمز فيما يلي بـ $\lambda_{\min}$ إلى أصغر قيمة ذاتية لـ u^*u ، و بـ $\lambda_{\max}$ إلى أكبر قيمة ذاتية له.
2. ليكن $u \in \mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ $\forall x \in E, \quad \lambda_{\min}(u)\|x\|^2 \le \|u(x)\|^2 \le \lambda_{\max}(u)\|x\|^2$.
3. ليكن u و v من $\mathcal{L}(E)$. أثبت أنّ

$$\forall \nu \in \mathrm{sp}(u\circ v), \quad \lambda_{\min}(u)\lambda_{\min}(v) \le |\nu|^2 \le \lambda_{\max}(u)\lambda_{\max}(v)$$

التمرين 17. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء سلمي منتهي البُعد، وليكن $u \in \mathcal{L}(E)$. نزوّد $\mathcal{L}(E)$ بنظيم التطبيقات الخطيّة المستمرّة على E .

I. أثبت أنّ $\|u\| = \|u^*\|$.

II. نفترض أنّ $\|u\| \le 1$.

1. أثبت أنّ $\ker(I-u) = \ker(I-u^*)$.
2. نعرّف $F_1 = \ker(I-u)$ و $F_2 = \mathrm{Im}(I-u)$. أثبت أنّ $F_2^{\perp} = F_1$.
3. أياً كان $1 \le k$ ، نضع $u_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u^k$. أثبت أنّ المتتالية $\left(u_p(x)\right)_{p\ge 1}$ تتقارب نحو المسقط القائم لـ x على F_1 ، وذلك أياً كان $x \in E$.

التمرين 18. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة. أثبت أنّ :

$$\left(\exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = I_n\right) \Rightarrow A^2 = I_n$$

التمرين 19. ليكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاءً إقليدياً بُعده 3 منسوباً إلى جملة متعامدة نظامية مباشرة $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. وليكن R الدوران بزاوية قدرها θ حول المحور الموجّه بشعاع الواحدة $\vec{\ell}$.

1. اكتب، باستخدام طريقة تغيير الأساس، مصفوفة R بالأساس $\mathcal{B}$. ثم أنجز الحساب حين يكون $\theta = \frac{\pi}{3}$ و $\vec{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$.
2. أثبت أنّ $\vec{\ell}\perp\vec{x} \Rightarrow R(\vec{x}) = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{\ell}\wedge\vec{x}$.
3. أثبت كذلك أنّ $\forall \vec{x} \in E,\ R(\vec{x}) = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{\ell}\wedge\vec{x} + (1-\cos\theta)\langle\vec{\ell},\vec{x}\rangle\vec{\ell}$.

التمرين 20. ليكن E فضاءً إقليدياً بُعده 3 منسوباً إلى جملة متعامدة نظامية مباشرة. عيّـن الطبيعة الهندسيّة للتحويلات الخطية على E الممثلة بالمصفوفات التالية:

$$A=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-2&6&-3\\6&3&2\\-3&2&6\end{bmatrix},\quad B=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}8&1&-4\\-4&4&-7\\1&8&4\end{bmatrix},\quad C=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1&2\\-2&2&1\\-1&-2&2\end{bmatrix}.$$

التمرين 21. نهدف في هذا المسألة إلى إثبات بعض خواص كثيرات حدود Legendre.

- نرمز بالرمز $C([-1,1])$ إلى فضاء التوابع الحقيقية المستمرة على $[-1,+1]$، وبالرمـز $C^k([-1,1])$، حيث $1\le k$، إلى الفضاء الجزئي المؤلّف من التوابع الحقيقية التي تقبـل الاشتقاق باستمرار k مرة على $[-1,+1]$.
- نزوّد الفضاء $C([-1,1])$ بالجداء السلّمي والنظيم الموافق له والمعرفَين بالعلاقتين التـاليتين أياً كان f و g من $C([-1,1])$:

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{و} \quad \|f\|=\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \qquad (1)$$

- أياً كان $n\in\mathbb{N}$ نرمز بالرمز $\mathbb{R}_n[X]$ إلى فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيـد درجتها عن n، ونطابق بين كثيرات الحدود هذه وبين التوابع الحدودية في $C([-1,1])$.
- إذا كان $f\in C^2([-1,1])$ فإننا نعرّف $L(f)\in C([-1,1])$ بالعلاقة

$$L(f)(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right).$$

- وأخيراً نضع $1=P_0(X)=U_0(X)$، و حين يكون $1\le n$ نعرّف

$$U_n(X)=(X^2-1)^n \quad \text{و} \quad P_n(X)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n U_n(X)}{\mathrm{d}X^n}$$

I

1. a. أثبت أنه أياً كان $n\in\mathbb{N}$ و $P\in\mathbb{R}_n[X]$ يكُن لدينا $L(P)\in\mathbb{R}_n[X]$. نرمـز إذن بالرمز L_n إلى التطبيق الخطّي $L_{|\mathbb{R}_n[X]}$ أي التطبيق:

$$L_n:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]:P\mapsto L(P).$$

b. اكتب M_n مصفوفة التطبيق الخطي L_n بالنسبة إلى الأساس القانوني $(1,X,\ldots,X^n)$ في $\mathbb{R}_n[X]$.

c. عيّن القيم الذاتية لـ L_n. هل يقبل L_n التمثيل بمصفوفة قطريّة؟

2. a. أثبت أنه مهما تكن $n \in \mathbb{N}$، لدينا $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

b. أثبت أنّ $\deg P_n = n$، و إذا كان a_n هو ثابت X^n في كثير الحدود P_n، فأثبت أنّ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

c. أثبت، باستخدام عبارة مناسبة للمقدار $\frac{d^n}{dX^n}\left((X-1)^n(X+1)^n\right)$، أنّ $P_n(1) = 1$.

d. عيّن كلاً من P_1 و P_2.

3. تحقق صحةَ العلاقتين التاليتين أياً كانت $n \in \mathbb{N}$:

$$U'_{n+1}(X) - 2(n+1)\,X\,U_n(X) = 0,$$
$$(X^2-1)U'_n(X) - 2n\,X\,U_n(X) = 0.$$

ثم أثبت باشتقاق كل منهما مرة $n+1$ أنّ

$$P'_{n+1}(X) = XP'_n(X) + (n+1)P_n(X) \tag{2}$$

$$L(P_n) = n(n+1)P_n \tag{3}$$

4. عيّن أساساً لـــ $\mathbb{R}_n[X]$ مؤلفاً من أشعة ذاتية لـــ L_n.

5. a. أثبت، أياً كانت $1 \le n$، أنّ التابع

$$f_n;[0,1] \to \mathbb{R}: f_n(x) = \left[P_n(x)\right]^2 + \frac{1-x^2}{n(n+1)}\left[P'_n(x)\right]^2$$

تابعٌ متزايدٌ.

b. استنتج أنّ $\forall x \in [-1,+1],\ |P_n(x)| \le 1$. (4)

II

1. a. أثبت أنه أياً كان $n \in \mathbb{N}$ و $f \in C^2([-1,1])$ فلدينا

$$\langle L(f), P_n\rangle = \langle f, L(P_n)\rangle = n(n+1)\langle f, P_n\rangle.$$

b. أثبت بحساب كل من $\langle L(P_n), P_m\rangle$ و $\langle P_n, L(P_m)\rangle$ أنّ $n \ne m \Leftarrow 0 = \langle P_n, P_m\rangle$.

c. أثبت أنّ

$$k \in \{0,1,\ldots,n-1\} \Leftarrow 0 = \langle P_n, X^k\rangle \tag{5}$$

2. a. أثبت أنه مهما تكن n ∋ IN، فلدينا $\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(x)P_n(x)\,dx = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$.

مساعدة: ما درجة كثير الحدود $P'_{n+1}(x)-(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}P_n(x)$ ؟.

b. أثبت من ناحية أخرى أنّ $\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(x)P_n(x)\,dx = 2$، واستنتج أنّ $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

3. أثبت أنّ جماعة كثيرات الحدود $(\widetilde{P}_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $\widetilde{P}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n$ تكوّن جماعة متعامدة نظامية بالنسبة إلى الجداء السلمي الذي عرّفناه على $C([-1,1])$، وأنّ الجماعة $(\widetilde{P}_0,\widetilde{P}_1,\ldots,\widetilde{P}_n)$ أساس متعامد نظامي لـ $\mathrm{IR}_n[X]$.

4. أثبت أنّ

$$\forall P \in \mathrm{IR}_n[X],\quad \|L(P)\| \leq n(n+1)\|P\| \tag{6}$$

مساعدة: عبّر عن P بدلالة الأساس السابق.

III

1. a. نعرّف، حين يكون $1 \leq n$، ما يلي: $Q_n(X) = (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)X\,P_n(X)$.

أثبت أنّ Q_n ∋ $\mathrm{IR}_n[X]$، واحسب $Q_n(1)$، وبيّن أيكون Q_n فردياً أم زوجياً ؟

b. أثبت باستخدام العلاقة (5) أنّ

$$k \in \{0,1,\ldots,n-2\} \Leftarrow \langle XP_n, P_k\rangle = \langle P_n, XP_k\rangle = 0.$$

c. استنتج مما سبق وجود عددين حقيقيين λ و μ بحيث

$$Q_n(X) = \lambda P_n(X) + \mu P_{n-1}(X).$$

d. استخدم نتائج السؤال 1. a. لتثبت أنّ $\lambda = 0$ و $\mu = -n$، ومن ثَمّ:

$$(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)X\,P_n(X) + n\,P_{n-1}(X) = 0 \tag{7}$$

e. استنتج أنّ

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}.$$

2. نضع $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta$.أثبت أن المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ متناقصة، ثم أوجد علاقة تدريجيّة بين W_n و W_{n-2} حين يكون $2 \leq n$ ، واستنتج أنّ المتتالية $(nW_nW_{n-1})_{n\geq 1}$ ثابتــة. وأخيراً احسب W_{2n} واستنتج أنّ $\forall n \geq 1, \quad |P_{2n}(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

3. تحقق أنّ $(2n+2)P_{2n+2}(0) + (2n+1)P_{2n}(0) = 0$ أياً كان $0 \leq n$. واستنتج باستخدام العلاقة (2) أنّ

$$|P'_{2n+1}(0)| \leq 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \, .$$

4. a. ليكن، عندما $1 \leq n$ ، التابع

$$\alpha_n : [-1,+1] \to \mathbb{R}, \ \alpha_n(x) = \sqrt{1-x^2}\, P_n(x) \, .$$

أثبت أنّه أياً كان x في $]-1,+1[$ فإنّ $\alpha'_n(x)\sqrt{1-x^2} + xP_n(x) + (x^2-1)P'_n(x) = 0$.

ثُم استخدم العلاقة (3) لتثبت أنّ $\alpha''_n(x) + \varphi_n(x)\alpha_n(x) = 0$ حيث

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{1-x^2}\left(n(n+1) + \frac{1}{1-x^2}\right) .$$

b. ليكن التابع $\beta_n :]-1,+1[\to \mathbb{R} : \beta_n(x) = [\alpha_n(x)]^2 + \frac{[\alpha'_n(x)]^2}{\varphi_n(x)}$. أثبت أنّ β_n تــابع زوجي و متناقص على المجال $[0,1[$.

c. استخدم نتائج 2. و 3. لإثبات أنّ $\beta_n(0) \leq \frac{2}{\pi n}$. ومن ثَمّ استنتج أنّ

$$\forall n \geq 1, \forall x \in]-1,+1[, \quad |P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}} \qquad (8)$$

IV

ليكن f في $C([-1,1])$ ، ولتكن $0 \leq n$ نعرّف $c_n(f) = \langle f, \widetilde{P}_n \rangle$ و $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\widetilde{P}_k$.

1. أثبت أنّ $f - S_n(f)$ عمودي على الفضاء الجزئي $\mathbb{R}_n[X]$ من $C([-1,+1])$ ، ثم استنتج أنّ $\sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2 \leq \|f\|^2$.

2. أثبت تقارب المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} (c_n(f))^2$ ، وعيّن نهاية المتتالية $(c_n(f))_{n\geq 0}$.

3. a. نفترض أنّ f ∋ $C^2([-1,1])$، و نضع $L(f) = g$. عبّر عن $c_n(g)$ بدلالة $c_n(f)$ ثمّ استنتج، أنّه لدينا $\lim_{n\to\infty} n(n+1)c_n(f) = 0$.

b. أثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} c_n(f)\widetilde{P}_n$ تتقارب بانتظام على $[-1,+1]$ نحو تـــابع مســـتمر $\widetilde{f}$ ∋ $C([-1,+1])$. استخدم (4).

c. أثبت أنّ $\left\langle f - \widetilde{f}, \widetilde{P}_n \right\rangle = 0 \quad \forall n \geq 0,$ ، واستخدم مبرهنـــة Wierstrass بعد أن تذكرها لتستنتج أنّ $f = \widetilde{f}$.

4. أثبت، باستخدام العلاقة (7)، أنّه أياً كان (x,y) ∋ $\mathbb{R}^2$ و أياً كان $0 \leq n$ فإنّ

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)P_k(x)P_k(y)(x-y) = (n+1)\left(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)\right)$$

نعرّف، أياً كان (x,y) ∋ $\mathbb{R}^2$ بحيث $x \neq y$ المقدار

$$K_n(x,y) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}\right).$$

5. أثبت أنّ $\int_{-1}^{1} K_n(x,y)\,\mathrm{d}y = 1$.

6. a. نفترض أنّ f ∋ $C^1([-1,1])$، وأنّ x ∋ $]-1,+1[$. أثبت أنّ

$$S_n(f)(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} K_n(x,y)(f(y) - f(x))\,\mathrm{d}y.$$

b. نعرف التابع :

$$g_x : [-1,+1] \to \mathbb{R} : g_x(y) = \begin{cases} (f(y) - f(x))/(y-x) & : \quad y \neq x \\ f'(x) & : \quad y = x \end{cases}.$$

أثبت أنّ g_x ∋ $C([-1,1])$، وأنّه، أياً كانت $1 \leq n$ ،

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{n+1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\, c_n(g_x)P_{n+1}(x) - \sqrt{\frac{2}{2n+3}}\, c_{n+1}(g_x)P_n(x)\right)$$

c. استخدم (8) لتثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} c_n(f)\widetilde{P}_n$ تتقارب ببساطة على $]-1,+1[$ نحو التابع $f_{|]-1,1[}$.

ജ ജ C3 C3



مراجع الكتاب

1. "*Cours de Mathématiques Spéciales*, I,II.",

   E. RAMIS & C. DESCHAMPS & J. ODOUX, Masson, 1979.

2. "*Cours de Mathématiques du Premier Cycle*",

   J. DIXMIER, Gautier-villars, 1977.

3. "*Cours de Mathématiques, Algèbre*",

   J.M. ARNAUDIES, H. FRAYSSE, Dunod Université, 1986.

4. "*Analyse Linéaire dans les espaces de dimension finie*",

   I. GLAZMAN, Y. LIUBITCH,, Mir Publishers, Moscow 1974.

5. "*Algebra*",

   S. LANG, Addison Wesley, 1971.

فهرس الرموز

يُبيِّن الجدول التالي أرقام صفحات الكتاب التي ظهر فيها الرمز الموافق لأول مرّة.

الفهرس

الفصل الأوّل

الفضاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطيّة

الفصل الثاني

الفضاءات الشعاعية المنتهية البعد

الفصل الثالث

الثنويّة في الفضاءات الشعاعيّة

الفصل الرابع

المصفوفات

الفصل الخامس

المُحدِّدات وجمل المعادلات الخطّية

الفصل السادس

اختزال التطبيقات الخطّية

الفصل السابع

الفضاءات الشعاعيّة المزوّدة بجداء سلّمي





سعر المبيع للطالب (٨٥) ل.س

مطبعة دار البعث ـ دمشق